

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC**

**Mestrado em Matemática Aplicada**



**DANILO PEIXOTO BELLUCCI**

**Sistemas Baseados em Regras Fuzzy e Aplicações**

Santo André

18/12/2009

Danilo Peixoto Bellucci

SISTEMAS BASEADOS EM REGRAS FUZZY E APLICAÇÕES.

Dissertação

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação Universidade Federal do ABC, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Adilson José Vieira Brandão

Santo André- SP  
2009

Ficha catalográfica produzida pela Biblioteca da Universidade Federal do ABC

BELLUCCI, Danilo Peixoto

Sistemas baseados em regras Fuzzy e aplicações / Danilo Peixoto Bellucci — Santo André: Universidade Federal do ABC, 2009.

68 f. 29 cm

Orientador: Adilson José Vieira Brandão

Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, Centro de Matemática, Computação e Cognição, Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada, 2009.

Referencias Bibliográficas: f. 67 - 68

1. Sistemas Fuzzy 2. Empreendedorismo 3. Sistemas P-Fuzzy I. Brandão, Adilson José Vieira II. Universidade Federal do ABC, Centro de Matemática, Computação e Cognição, Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada, 2009. III. Título.

CDD 003.54



Universidade Federal do ABC

**Serviço Público Federal**  
**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC**

*Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliaram e aprovaram a defesa de Dissertação de Mestrado do candidato **Danilo Peixoto Bellucci**, realizada em 18 de dezembro de 2009:*

---

Dr. Adilson José Vieira Brandão (UFSCAR)

---

Dra. Magda da Silva Peixoto (UFSCAR)

---

Dr. João Carlos da Motta Ferreira (UFABC)

# Agradecimentos

Primeiramente, ao meu orientador Prof. Dr. Adilson José Vieira Brandão, por acreditar em minha capacidade para desenvolver este trabalho, pela dedicação e pela amizade.

Aos professores Rodney Carlos Bassanezi e João Carlos da Motta Ferreira, pelas ajudas e conselhos, que fizeram deste um trabalho mais completo.

Ao amigo Moisés dos Santos Ceconello, pelo grande auxílio na estruturação deste trabalho e no desenvolvimento do algoritmo fuzzy.

Ao senhor João Viana Araujo, pela revisão ortográfica.

À minha mãe Maria, pelas orações, incentivos e, principalmente, pela paciência.

Ao meu pai Roberto, pelo apoio e estímulo depositados. Agradeço-lhe também pela sugestão de se trabalhar com empreendedorismo, tornando tal sugestão ponto principal desta dissertação.

À minha irmã Júlia e à minha futura esposa Ludmila, pelo carinho.

Aos meus familiares e amigos, em especial Douglas e Michele, pelo suporte que me deram ao longo destes anos.

À UFABC e à Capes, pelo apoio financeiro.

A Deus.

# Resumo

Um Sistema Baseado em Regras Fuzzy é uma ferramenta matemática que se utiliza da Lógica Fuzzy para encontrar respostas ou controlar algum tipo de problema. Iremos utilizar tal ferramenta para classificar pessoas quanto à aptidão ao empreendedorismo, a fim de qualificá-las como aptas ou não para a abertura de uma empresa. Além disso, mostraremos mais uma aplicação desta ferramenta relacionada à cerâmica vermelha, classificando a qualidade do produto final, o tijolo. Mostraremos também uma aplicação da Lógica Fuzzy relacionada ao diagnóstico médico, identificando a relação de uma criança com um certo tipo de doença.

Também apresentaremos o conceito de Sistemas P-Fuzzy, o qual é um sistema dinâmico obtido através de um Sistema Baseado em Regras Fuzzy. Este sistema tem aplicações na modelagem de vários problemas como, por exemplo, dinâmica populacional.

**Palavras-chave:** Sistemas Baseados em Regras Fuzzy, Empreendedorismo, Sistemas P-Fuzzy.

# Abstract

A Fuzzy rule-based system is a mathematical tool that uses the fuzzy logic to find answers or control a specific type of problem. We will use this tool to classify people as the ability to entrepreneurship, in order to qualify them as suitable or not to open their own company. Furthermore, we show two more applications of this tool: one related to medical diagnosis, identifying the higher chance of a child having a kind of disease, and another related to clay products, ranking the quality of the final product, the brick.

We will also introduce the concept of P-Fuzzy System, which is a dynamic system obtained of a fuzzy rule-based system. This system has applications in modeling of several problems, such as population dynamics.

**Keywords:** Fuzzy rule-based system, Entrepreneurship, P-Fuzzy System.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>vii</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>viii</b>
<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Conjuntos Fuzzy</b>	<b>5</b>
1.1 Preliminares . . . . .	6
1.2 Conjuntos Fuzzy . . . . .	7
1.3 Operações com subconjuntos fuzzy . . . . .	8
1.4 $\alpha$ -nível . . . . .	11
1.5 Números Fuzzy . . . . .	12
1.6 Lógica Fuzzy . . . . .	14
1.6.1 Conectivos Lógicos . . . . .	15
1.6.2 Variáveis Linguísticas . . . . .	17
1.6.3 Relação e Produto Cartesiano Fuzzy . . . . .	17
1.7 Diagnóstico Médico . . . . .	19
<b>2 Sistemas Baseados em Regras Fuzzy</b>	<b>22</b>
2.1 Controlador Fuzzy . . . . .	22
2.1.1 Módulo de fuzzificação . . . . .	22
2.1.2 Módulo da base de regras . . . . .	23
2.1.3 Módulo de inferência fuzzy . . . . .	23
2.1.4 Módulo de Defuzzificação . . . . .	25
<b>3 Aplicações de Sistemas Baseados em Regras Fuzzy</b>	<b>26</b>
3.1 Cerâmica Vermelha . . . . .	26
3.1.1 Modelagem . . . . .	29
3.1.2 Simulações . . . . .	33
3.2 Empreendedorismo . . . . .	35
<b>4 Sistemas P-Fuzzy</b>	<b>41</b>
4.1 Sistemas P-Fuzzy Unidimensionais . . . . .	42
4.2 Sistemas P-Fuzzy Bidimensionais . . . . .	44
4.3 Análise comparativa entre equações diferenciais e sistemas p-fuzzy . . . . .	46
4.4 Dinâmica Populacional Fuzzy com Condição Ambiental . . . . .	47
4.4.1 Modelagem . . . . .	48



4.4.2 Construindo a Base de Regras . . . . . 49  
4.4.3 Experimentos Numéricos . . . . . 51

**Referências Bibliográficas** . . . . . **57**

# Lista de Figuras

1.1	Gráfico de $\varphi_{\Omega}$ . . . . .	8
1.2	Gráfico de $\gamma_{\Omega}$ . . . . .	9
1.3	Operações com subconjuntos fuzzy. . . . .	10
1.4	$\alpha$ -nível e suporte de $\Omega$ . . . . .	11
1.5	Número fuzzy triangular. . . . .	13
1.6	Número fuzzy trapezoidal. . . . .	13
1.7	Comparativo entre número real e fuzzy. . . . .	13
1.8	Comparativo entre intervalo crisp e fuzzy. . . . .	14
1.9	Número fuzzy em forma de sino. . . . .	14
1.10	Variável linguística <i>temperatura</i> . . . . .	18
2.1	Controlador Fuzzy . . . . .	22
2.2	Módulos de um controlador fuzzy. . . . .	23
2.3	Método de Mamdani. . . . .	24
2.4	Defuzzificador centro de gravidade G(C). [1] . . . . .	25
3.1	Processo de fabricação da cerâmica. . . . .	27
3.2	Funções de pertinência. . . . .	31
3.3	Funções de pertinência da variável de saída Secagem. . . . .	31
3.4	Estrutura do SBRF para avaliar a qualidade do produto. . . . .	32
3.5	Funções de pertinência. . . . .	32
3.6	Funções de pertinência. . . . .	39
3.7	Programa feito no Matlab para avaliação empreendedora. . . . .	40
4.1	Arquitetura de um Sistema P-Fuzzy. . . . .	42
4.2	Família de subconjuntos fuzzy sucessivos. . . . .	43
4.3	Conjunto viável de equilíbrio. . . . .	43
4.4	Variáveis de entrada e saída. . . . .	47
4.5	Gráficos do modelo clássico e p-fuzzy. . . . .	47
4.6	Arquitetura de um Sistema P-Fuzzy com Condição Ambiental. . . . .	49
4.7	Variáveis de entrada e saída. . . . .	50
4.8	Iteração $\times$ População. Soluções com $x_0 = 40$ , $K = 400$ e condição ambiental variando. . . . .	52
4.9	Iteração $\times$ População. Soluções com $x_0 = 150$ , $K = 400$ e condição ambiental variando. . . . .	53
4.10	Iteração $\times$ População. Soluções com $x_0 = 250$ , $K = 400$ e condição ambiental variando. . . . .	54
4.11	Iteração $\times$ População. Soluções com $x_0 = 50$ , $K = 800$ e condição ambiental variando. . . . .	55

# Lista de Tabelas

1.1	Tabela verdade de $\Rightarrow$ . . . . .	17
1.2	Relação fuzzy R: sintomas $\times$ doenças. . . . .	20
1.3	Relação fuzzy S: pacientes $\times$ sintomas, elaborados por especialista. . . . .	20
1.4	Relação fuzzy D: pacientes $\times$ doença. . . . .	21
3.1	Percentual de água na conformação [10]. . . . .	27
3.2	Base de Regras do sistema que avalia a secagem da cerâmica [10]. . . . .	30
3.3	Base de regras do sistema que avalia a qualidade da cerâmica. . . . .	33
3.4	Base de Regras: empreendedorismo. . . . .	37
3.5	Resultados . . . . .	37
4.1	Base de regras. . . . .	50
4.2	Algoritmo. . . . .	51

# Introdução

Em 1965, Lofti Asker Zadeh [22], professor do departamento de engenharia elétrica na Universidade de Berkeley, apresentou uma teoria de conjuntos em que não há descontinuidades, ou seja, não há uma disjunção abrupta entre elementos pertencentes e não pertencentes a um conjunto, os conjuntos fuzzy. Com essa nova teoria, era possível trabalhar matematicamente com termos imprecisos como “aproximadamente”, “muito”, “alto”, etc, tornando prático o uso de tais conceitos subjetivos em computação e programação.

A modelagem de atividades relacionadas a problemas industriais, biológicos ou químicos poderia ser simplificada se fosse utilizada a idéia de conjuntos fuzzy. A primeira aplicação conhecida de sucesso foi feita em 1974, pelo professor Mamdani, do Queen Mary College, da Universidade de Londres, quando implementou um controle de uma máquina a vapor, baseado em lógica fuzzy. Até então, não se tinha conseguido automatizar essas máquinas com outras técnicas de controle.

Outras aplicações podem ser vistas a seguir.

1. Em 1977, Ostergaard realiza o controle de um trocador de calor em um forno de cimento.
2. Em 1979, Kolomov cria o primeiro autômato fuzzy finito.
3. Em 1983, Sugeno e Takagi criam uma metodologia de derivação de regras de controle fuzzy.
4. Em 1986, Yamakawa cria o primeiro hardware de um controlador fuzzy.
5. Em 1987, Yasunobu e Miyamoto usam a teoria fuzzy no controle de aceleração, frenagem e parada de trem.

Enfim, podemos encontrar diversas aplicações da teoria fuzzy em diferentes áreas da ciência. Porém, mesmo com os estudos teóricos terem se desenvolvido na Europa e nos Estados Unidos, as aplicações tiveram mais ênfase no Oriente, principalmente no Japão, que investiu muito no desenvolvimento de tecnologias baseadas na Teoria Fuzzy [11].

Zadeh, em 1965, definiu um Conjunto Fuzzy associando cada elemento do conjunto a um valor entre zero e um, a fim de representar o quanto um elemento pertence ao conjunto,

através do que chamamos de função grau de pertinência. Além disso, estendeu para os conjuntos fuzzy os conceitos clássicos de “união”, “intersecção”, etc.

INFORMATION AND CONTROL 8, 338-353 (1965)

## Fuzzy Sets\*

L. A. ZADEH

*Department of Electrical Engineering and Electronics Research Laboratory,  
University of California, Berkeley, California*

A fuzzy set is a class of objects with a continuum of grades of membership. Such a set is characterized by a membership (characteristic) function which assigns to each object a grade of membership ranging between zero and one. The notions of inclusion, union, intersection, complement, relation, convexity, etc., are extended to such sets, and various properties of these notions in the context of fuzzy sets are established. In particular, a separation theorem for convex fuzzy sets is proved without requiring that the fuzzy sets be disjoint.

Uma motivação para o estudo da teoria fuzzy é que o pensamento humano, o raciocínio e o processo de decisão não são precisos, no sentido que não conseguimos expressar com certeza ou clareza nossos pensamentos. E tais incertezas estão presentes em nosso dia-a-dia: se está *muito* frio, colocamos *muita* roupa; se está *muito* calor, colocamos *pouca* roupa. Termos linguísticos como “muito”, “pouco” são considerados incertos, pois não sabemos exatamente qual o valor que limita o que é ser *muito* e o que é ser *pouco*. A Teoria de Conjuntos Fuzzy e os Conceitos de Lógica Fuzzy nos fornecem ferramentas para se traduzir matematicamente tais termos linguísticos, e iremos apresentar tais “ferramentas” mais adiante.

Podemos dizer que esta teoria vem se expandindo desde seu surgimento, com Zadeh, em 1965. O número de publicações, segundo o site da Universidade de Berkeley (banco de dados da INSPEC), contendo a palavra “fuzzy” em seu título, subiu de 579, na década de 70, para mais de 2 mil na década de 80, ultrapassando a casa dos 20 mil na década de 90. Isso deve-se ao fato da vasta aplicabilidade dessa teoria em diversas áreas da ciência: engenharia, computação, biologia, etc.

Neste trabalho, iremos definir os principais conceitos de Teoria de Conjuntos Fuzzy e Lógica Fuzzy, assim como os chamados Sistemas Baseados em Regras Fuzzy (SBRF) e Sistemas P-Fuzzy. Um Sistema Baseados em Regras Fuzzy utiliza lógica fuzzy para encontrar uma resposta a algum tipo de problema, ou alguma situação. Iremos mostrar duas

aplicações dos SBRF: análise da qualidade da cerâmica vermelha e análise de características empreendedoras. Além disso, mostraremos uma aplicação da lógica fuzzy, relacionada a diagnóstico médico.

Sistemas P-Fuzzy tentam modelar um sistema dinâmico utilizando a saída de um SBRF, sem a presença explícita de equações. Um exemplo de aplicações de sistemas p-fuzzy encontrado neste trabalho é em dinâmica populacional. Uma primeira abordagem utiliza como entrada apenas a quantidade de habitantes, e a segunda, além da população, teremos como variável de entrada o que chamamos de condição ambiental, que representa o período do ano em que se estuda a dinâmica, que consideramos um fator importante em tal estudo, devido ao fato do crescimento populacional ser sazonal. As idéias destas aplicações foram extraídas dos trabalhos de Silva [19] e de Santos [16]. Podemos citar também o trabalho de Peixoto [14], que utiliza um sistema p-fuzzy para estudar a interação entre pulgões, joaninhas e um parasitóide da citricultura, onde pulgões são considerados agentes transmissores da morte súbita dos citros.

No primeiro capítulo, apresentaremos as principais definições de conjuntos clássicos, e alguns resultados. Além disso, definiremos o que é um conjunto fuzzy, assim como as operações entre tais conjuntos,  $\alpha$ -nível, suporte e números fuzzy. Também abordaremos os conceitos de Lógica Fuzzy, que utiliza a Teoria de Conjuntos Fuzzy para trabalhar com problemas que, de alguma maneira contém informações imprecisas. Para tanto, iremos expandir alguns conceitos de lógica clássica para lógica fuzzy, como: conectivos lógicos, variáveis linguísticas e relação e produto cartesiano fuzzy. No final, apresentaremos uma aplicação, onde tentamos relacionar um paciente com uma doença, de acordo com seus sintomas apresentados.

Nosso principal resultado irá utilizar o que chamamos de Sistemas Baseados em Regras Fuzzy (SBRF), e pode ser visto no capítulo 2. Nele, definimos o que é um controlador fuzzy, que é um caso particular de um Sistema Baseado em Regras Fuzzy, que nada mais é do que uma ferramenta que se utiliza da lógica fuzzy para se traduzir matematicamente um problema, constituído por 4 módulos: fuzzificação, base de regras, inferência e defuzzificação.

Os resultados obtidos através de SBRF são mostrados no terceiro capítulo: cerâmica vermelha e empreendedorismo. O primeiro avalia a qualidade de uma peça de cerâmica (tijolo), a fim de qualificar como própria ou imprópria para o repasse ao mercado, após seu processo de fabricação, que engloba setores como queima e secagem [10].

A segunda aplicação visa identificar características empreendedoras em pessoas que pretendem abrir uma empresa, onde é feita uma análise de algumas características empreendedoras, segundo dados do Sebrae (Serviço Brasileiro de Apoio às Micro e Pequenas Empresas) [18]. Nesta análise, iremos utilizar duas abordagens distintas. Na primeira, utilizaremos cinco características empreendedoras e as variáveis poderão assumir valores linguísticos

como: baixo, médio e alto. Numa segunda abordagem, iremos usar oito características empreendedoras e as variáveis assumirão valores numéricos entre zero e dez, e, de acordo com a função de pertinência, será considerada como presente ou ausente. A base de regras foi construída com o auxílio de Roberto Bellucci, analista do SEBRAE/PA, que nos ajudou também a fazer a pesquisa empreendedora com algumas pessoas que procuraram o SEBRAE a fim de obter ajuda para a abertura de uma empresa.

No quarto capítulo, apresentamos os Sistemas P-Fuzzy, que nada mais são do que sistemas dinâmicos obtidos através de Sistemas Baseados em Regras Fuzzy. Exemplos como Variação Populacional e Dinâmica Populacional Fuzzy com Condição Ambiental serão apresentados neste capítulo. Como aplicação, vamos simular uma equação diferencial utilizando um Sistema P-Fuzzy, e iremos comparar o resultado clássico com o resultado obtido através do Sistema P-Fuzzy.

## Capítulo 1

# Conjuntos Fuzzy

Quando nos deparamos com situações do tipo “aquela pessoa é muito alta?” ou “hoje faz muito calor?”, respostas como “sim” ou “não” nem sempre representam o que queremos expressar. De certo modo, “alta” e “calor” podem representar subjetividade, no sentido que não sabemos definir, precisamente, o que exatamente é fazer *calor*, ou ser *alta*. Quando trabalhamos com conjuntos fuzzy, tal imprecisão é associada com uma função, que chamamos de função de pertinência e, deste modo, conseguimos definir o quanto é fazer “muito calor”, ou ser “muito alta”.

Um conjunto clássico, chamado em inglês de *crisp*, fica bem definido no sentido que sabemos identificar se um elemento pertence ao conjunto ou não. Um cachorro é um mamífero e um peixe não o é. Isso caracteriza um conjunto clássico (crisp). Agora seja  $A$  o conjunto das pessoas altas definido como  $A = \{x \in U / x \geq 1.85m\}$ , ou seja, uma pessoa é considerada alta se tiver 1.85m de altura ou mais. Então uma pessoa com 1.84m de altura não estaria em  $A$ , mas ela poderia ser considerada baixa? Não. É neste contexto que surge a idéia de conjuntos fuzzy e função de pertinência, que vamos definir mais adiante.

Nos conjuntos clássicos (crisp), a função característica, que é uma função que determina se um elemento está ou não em um conjunto, tem contra-domínio  $\{0,1\}$ . Se um elemento está no conjunto, tem característica 1, caso contrário, tem característica 0. Um cachorro tem característica 1 no conjunto dos mamíferos e o peixe teria característica 0, neste mesmo conjunto. Já nos conjuntos fuzzy, a função é chamada de função de pertinência e seu contra-domínio se estende a  $[0,1]$ . Ou seja, podemos definir uma função  $\varphi$  para o conjunto das pessoas altas  $A$ , tal que  $\varphi(1,84) = 0,95$ , por exemplo. Isto significa que uma pessoa com 1,84m de altura seria alta com grau 0,95. Deste modo, todas as pessoas poderiam ser consideradas altas, com um certo grau de pertinência entre 0 e 1.

Neste capítulo definiremos os principais conceitos de Conjuntos Clássicos e Conjuntos Fuzzy, assim como os principais resultados dessa teoria. Mais detalhes podem ser encontrados em [6], [8] e [9].



## 1.1 Preliminares

Primeiramente, definiremos os principais conceitos de conjuntos clássicos, assim como algumas proposições e resultados importantes. Mais adiante, introduziremos o que é um conjunto fuzzy, assim como alguns resultados. Mais detalhes sobre teoria clássica de conjuntos podem ser encontrados em [7]

**Definição 1.1.** *Um conjunto é uma coleção qualquer de objetos, denominados de elementos do conjunto. O conjunto vazio  $\emptyset$  é o conjunto formado pela coleção vazia de objetos.*

**Definição 1.2.** *Conjunto Universo é um conjunto que contém todos os conjuntos, considerados de um certo problema. Assim, todos os conjuntos trabalhados num problema podem ser considerados subconjuntos de um conjunto maior, conhecido como Conjunto Universo, ou simplesmente Universo.*

**Definição 1.3.** *Seja  $X$  um conjunto universo. Definimos o conjunto das potências de  $X$  como sendo o conjunto formado por todos os subconjuntos de  $X$  e denotado pelo símbolo  $P(X)$ . Assim,*

$$P(X) = \{A | A \subseteq X\}.$$

*Definimos também o conjunto*

$$F(X, [0, 1]) = \{\mu | \mu : X \rightarrow [0, 1]\}.$$

**Proposição 1.** *Se  $X$  é um conjunto universo, então todo subconjunto  $A$  de  $X$  define uma função  $\chi_A \in F(X, [0, 1])$ , tal que*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A, \\ 0 & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

*Em particular,  $\chi_{\emptyset} \equiv 0$  e  $\chi_X \equiv 1$ . Reciprocamente, dada qualquer função  $\chi \in F(X, [0, 1])$  tal que o conjunto imagem  $Im(\chi) \subseteq \{0, 1\}$ , então existe um único subconjunto  $A$  de  $X$  tal que  $\chi = \chi_A$ .*

**Proposição 2.** *Sejam  $X$  um conjunto universo,  $A$  e  $B$  conjuntos em  $X$ . Então, valem as seguintes afirmações:*

- i)  $A \subseteq B$  se, e somente se,  $\chi_A \leq \chi_B$ ;*
- ii)  $\chi_{A \cup B} = \max\{\chi_A, \chi_B\}$ ;*
- iii)  $\chi_{A \cap B} = \min\{\chi_A, \chi_B\}$ ;*
- iv) Se  $X/A$  é o conjunto complementar de  $A$ , em  $X$ , então  $\chi_{X/A} = 1 - \chi_A$ .*

**Proposição 3.** *Seja  $X$  um conjunto universo e  $\{A_i\}_{i \in I}$  uma família de subconjuntos de  $X$ . As seguintes afirmações valem:*

- i)  $\chi_{\cup_{i \in I} A_i} = \sup_{i \in I} \chi_{A_i}$ ;
- ii)  $\chi_{\cap_{i \in I} A_i} = \inf_{i \in I} \chi_{A_i}$ .

**Proposição 4.** *Sejam  $X$  e  $Y$  conjuntos universos e  $X \times Y$  o produto cartesiano de  $X$  por  $Y$ . Se  $A \subseteq X$  e  $B \subseteq Y$ , então*

$$\chi_{A \times B}(x, y) = \min\{\chi_A(x), \chi_B(y)\},$$

para todo par ordenado  $(x, y) \in X \times Y$ .

## 1.2 Conjuntos Fuzzy

Seja  $X$  um conjunto universo. Todo subconjunto clássico de  $X$  fica determinado por sua função característica. A função característica  $\chi_A : X \rightarrow \{0, 1\}$  de um conjunto clássico  $A$  é definida da seguinte forma:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A, \\ 0 & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

Por exemplo, seja  $X = \mathbb{N}$  e  $\mathbf{P}$  o conjunto dos números primos e  $\chi_{\mathbf{P}}$  sua função característica dada por:

$$\chi_{\mathbf{P}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ é primo,} \\ 0 & \text{se } x \text{ não é primo.} \end{cases}$$

Então  $\chi_{\mathbf{P}}(3) = 1$  e  $\chi_{\mathbf{P}}(8) = 0$ .

Assim como um conjunto clássico fica determinado pela sua função característica, um conjunto fuzzy fica determinado pela sua função de pertinência.

**Definição 1.4.** *Seja  $U$  um conjunto universo clássico. Um subconjunto fuzzy é um par  $(F, \varphi_F)$ , com  $F \subset U$  e  $\varphi_F : U \rightarrow [0, 1]$  é a chamada função grau de pertinência.*

A imagem de um elemento de  $F$  ser 0 significa que esse elemento definitivamente não está no conjunto fuzzy; a imagem ser 1 significa que ele está completamente no conjunto, e se a imagem estiver entre 0 e 1, caracteriza o grau de pertinência do elemento no conjunto.

**Exemplo 1.4.1.** *Seja  $\Omega$  o conjunto dos números próximos de 5:*

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R} / x \text{ é próximo de } 5\}.$$

Podemos definir  $\varphi_\Omega : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ , que associa  $x \in \mathbb{R}$  a um valor de proximidade ao ponto 5, como:

$$\varphi_\Omega(x) = \begin{cases} 1 - |x - 5| & \text{se } x \in [4; 6], \\ 0 & \text{se } x \notin [4; 6]. \end{cases}$$

cuja representação gráfica é mostrada a seguir.

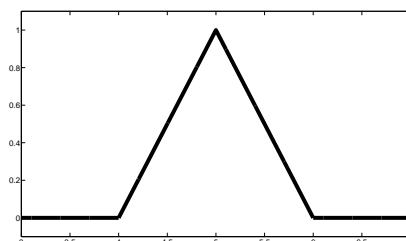


Figura 1.1: Gráfico de  $\varphi_\Omega$

Desta forma,  $\varphi_\Omega(5, 5) = 0,5$  e  $\varphi_\Omega(6, 5) = 0$ . Dizemos que  $x = 5,5$  é um elemento de  $\Omega$  com grau de pertinência  $0,5$  e  $x = 6,5$  é um elemento de  $\Omega$  com grau de pertinência  $0$ , ou seja, não é um ponto próximo de  $5$ .

Observe que tal função de pertinência não é única. Temos aí uma subjetividade do termo “próximo de”. Podemos definir uma função de pertinência que mais nos convém. Por exemplo, suponhamos que é suficiente estar no conjunto  $[4,5; 5,5]$  para dizermos que um número seja próximo de  $5$  com grau  $1$ . Assim, podemos definir uma nova função de pertinência para  $\Omega$ :

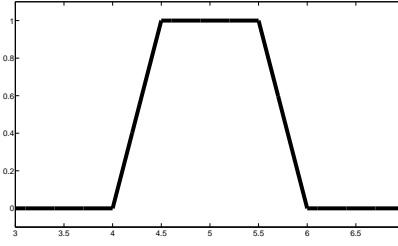
$$\gamma_\Omega(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 4, \\ 2x - 8 & \text{se } x \in [4; 4, 5], \\ 1 & \text{se } x \in [4, 5; 5, 5], \\ -2x + 12 & \text{se } x \in [5, 5; 6], \\ 0 & \text{se } x > 6, \end{cases}$$

cujos gráficos são ilustrados na figura 1.2.

Esse fato nos permite concluir que a função de pertinência pode ser construída de acordo com como se quer avaliar o termo “próximo”, ou o termo subjetivo do problema em questão.

### 1.3 Operações com subconjuntos fuzzy

Extenderemos agora as operações básicas de conjuntos clássicos a conjuntos fuzzy, como união, intersecção e complementação.


 Figura 1.2: Gráfico de  $\gamma_{\Omega}$ 

Sejam  $A$  e  $B$  dois subconjuntos fuzzy de  $U$ , com funções de pertinências  $\varphi_A$  e  $\varphi_B$ , respectivamente. Dizemos que  $A$  é subconjunto fuzzy de  $B$ ,  $A \subset B$ , se  $\varphi_A(x) \leq \varphi_B(x)$ , para todo  $x \in U$ .

**Definição 1.5.** A união de  $A$  e  $B$  é o subconjunto fuzzy  $A \cup B$  de  $U$  cuja função de pertinência é dada por:

$$\varphi_{A \cup B}(x) = \max_{x \in U} \{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\}.$$

A intersecção entre  $A$  e  $B$  é o subconjunto fuzzy  $A \cap B$  de  $U$  cuja função de pertinência é dada por:

$$\varphi_{A \cap B}(x) = \min_{x \in U} \{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\}.$$

O complementar de  $A$  em relação a  $U$  é o subconjunto  $A'$  de  $U$  cuja função de pertinência é dada por:

$$\varphi_{A'}(x) = 1 - \varphi_A(x), \quad x \in U.$$

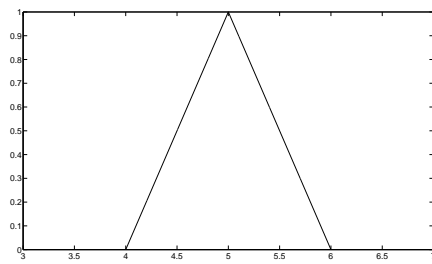
**Exemplo 1.5.1.** Sejam  $(\Omega, \varphi_{\Omega})$  o conjunto fuzzy dos números próximos de 5 e  $(\Phi, \varphi_{\Phi})$  o conjunto fuzzy dos números próximos de 4, com  $\varphi_{\Omega} : \mathbb{R} \rightarrow [0; 1]$  dada por:

$$\varphi_{\Omega} = \begin{cases} 1 - |x - 5| & \text{se } x \in [4; 6], \\ 0 & \text{se } x \notin [4; 6], \end{cases}$$

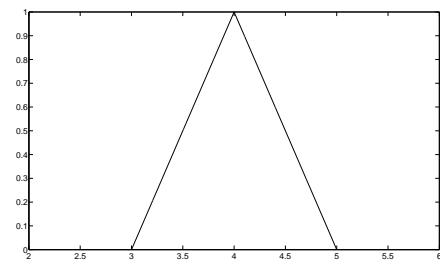
e  $\varphi_{\Phi} : \mathbb{R} \rightarrow [0; 1]$  dada por:

$$\varphi_{\Phi} = \begin{cases} 1 - |x - 4| & \text{se } x \in [3; 5], \\ 0 & \text{se } x \notin [3; 5]. \end{cases}$$

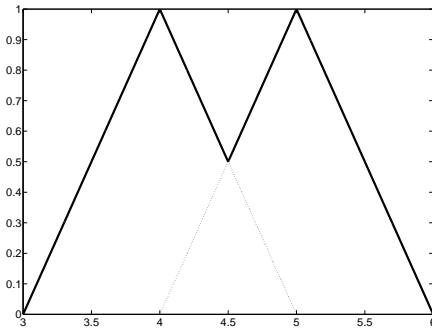
A representação de  $\varphi_{\Omega}$ ,  $\varphi_{\Phi}$ ,  $\varphi_{\Omega \cup \Phi}$ ,  $\varphi_{\Omega \cap \Phi}$  e  $\varphi_{\Omega'}$  pode ser vista na figura 1.3.



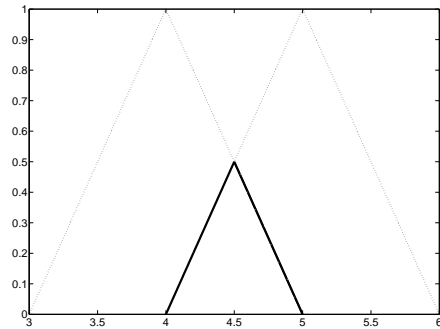
(a) Gráfico de  $\varphi_{\Omega}$



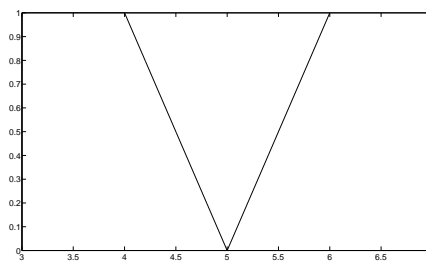
(b) Gráfico de  $\varphi_{\Phi}$



(c) Gráfico de  $\varphi_{\Omega \cup \Phi}$



(d) Gráfico de  $\varphi_{\Omega \cap \Phi}$



(e) Gráfico de  $\varphi_{\Omega'}$

Figura 1.3: Operações com subconjuntos fuzzy.

Note que, em se tratando de conjuntos fuzzy,  $\Omega \cap \Omega'$  pode não ser vazio, como visto no exemplo anterior. O elemento 4,5 de  $\Omega$  é “próximo” de 5 com grau de pertinência 0,5, e também é um elemento de  $\Omega'$  “distante” de 5 com grau de pertinência 0,5. Essa é uma característica particular dos conjuntos fuzzy, pois, nos conjuntos clássicos, um elemento não pode estar em um conjunto e em seu complementar ao mesmo tempo. O mesmo se aplica a  $\Omega \cup \Omega'$ , que pode não ser  $U$ . De fato,  $\varphi_{\Omega \cup \Omega'}(5, 5) = \max\{0, 5; 0, 5\} = 0,5 \neq 1$ .

## 1.4 $\alpha$ -nível

Um  $\alpha$ -nível de  $F \subset U$  é um subconjunto clássico de  $U$  cujos elementos são imagens, pela função pertinência de  $F$ , maiores ou iguais a  $\alpha$ . Mais precisamente:

**Definição 1.6.** *Sejam  $F$  um subconjunto fuzzy de  $U$  e  $\alpha \in (0, 1]$ . O  $\alpha$ -nível de  $F$  é um subconjunto clássico de  $U$ , denotado por  $[F]^\alpha$ , e definido por:*

$$[F]^\alpha = \{x \in U : \varphi_F(x) \geq \alpha\}.$$

Definiremos agora o conceito de suporte de um subconjunto fuzzy  $F \subset U$ , que são os elementos de  $U$  com grau de pertinência não-nulos em  $F$ .

**Definição 1.7.** *Seja  $F$  um subconjunto fuzzy de  $U$ . O suporte de  $F$  é o subconjunto  $\text{supp}(F)$  de  $U$  cujos elementos têm grau de pertinência não-nulos, ou seja:*

$$\text{supp}(F) = \{x \in U : \varphi_F(x) > 0\}.$$

**Definição 1.8.** *Seja  $F$  um subconjunto fuzzy de  $U$ . O  $\alpha$ -nível zero é definido como o fecho do suporte de  $F$ , isto é,  $[F]^0 = \overline{\text{supp}(F)}$ .*

Os gráficos da figura 1.4 representam o  $\alpha$ -nível e o suporte do conjunto  $\Omega$ , do exemplo 1.5.1.

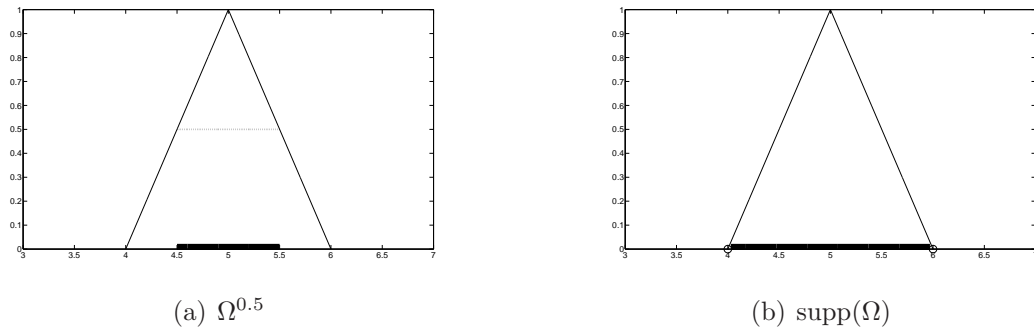


Figura 1.4:  $\alpha$ -nível e suporte de  $\Omega$ .

**Definição 1.9.** *Um conjunto fuzzy  $(F, \varphi_F)$  de  $U$  é dito normal se existe  $x \in U$  tal que  $\varphi_F(x) = 1$ .*

O conjunto  $\Phi$ , do exemplo anterior, é normal, pois  $\varphi_\Phi(4) = 1$ .

## 1.5 Números Fuzzy

**Definição 1.10.** Um subconjunto fuzzy  $(F, \varphi_F)$  é chamado de número fuzzy quando o conjunto universo no qual  $\varphi_F$  está definida é o conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$  e satisfaz as condições:

1. todos os  $\alpha$ -níveis de  $F$  são não-vazios, com  $0 \leq \alpha \leq 1$ ;
2. todos os  $\alpha$ -níveis de  $F$  são intervalos fechados de  $\mathbb{R}$ ; e
3.  $\text{supp}(F) = \{x \in (\mathbb{R}) : \varphi_F(x) > 0\}$  é limitado.

Os números fuzzy mais comuns são os **triangulares**, **trapezoidais** e **em forma de sino**.

**Definição 1.11.** Um número fuzzy  $(F, \varphi_F)$  é dito triangular se  $\varphi_F$  for da forma

$$\varphi_F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq a, \\ \frac{x-a}{u-a} & \text{se } a < x \leq u, \\ \frac{x-b}{u-b} & \text{se } u < x < b, \\ 0 & \text{se } x \geq b. \end{cases}$$

O gráfico da função de pertinência  $\varphi_F$  de um número fuzzy triangular tem a forma de um triângulo, que pode ser simétrico ou não. Caso  $u - a = b - u$ , então teremos um número fuzzy simétrico em relação a  $u$ , e sua função de pertinência se simplifica a:

$$\varphi_F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x-u|}{\delta} & \text{se } u - \delta \leq x \leq u + \delta, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

**Exemplo 1.11.1.** Seja  $(F, \varphi_F)$  o conjunto fuzzy dos números próximos de 70, cuja função de pertinência é:

$$\varphi_F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 68, \\ \frac{x-68}{2} & \text{se } 68 < x \leq 70, \\ \frac{72-x}{2} & \text{se } 70 < x < 72, \\ 0 & \text{se } x \geq 72. \end{cases}$$

O gráfico de  $\varphi_F(x)$  é:

**Definição 1.12.** Um número fuzzy  $(F, \varphi_F)$  é dito trapezoidal se  $\varphi_F$  for da forma

$$\varphi_F(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & \text{se } a \leq x < b, \\ 1 & \text{se } b \leq x \leq c, \\ \frac{d-x}{d-c} & \text{se } c < x \leq d, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

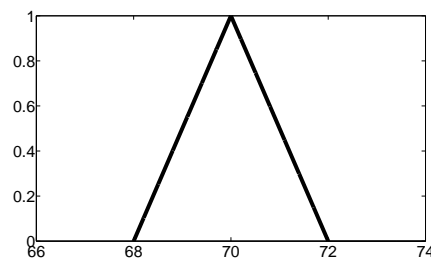


Figura 1.5: Número fuzzy triangular.

**Exemplo 1.12.1.** O conjunto fuzzy dos adolescentes pode ser representado pelo número fuzzy trapezoidal, dado pela função de pertinência da equação abaixo e mostrado na figura 1.6.

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} \frac{x-11}{3} & \text{se } 11 \leq x \leq 14, \\ 1 & \text{se } 14 < x \leq 17, \\ \frac{20-x}{3} & \text{se } 17 < x \leq 20, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

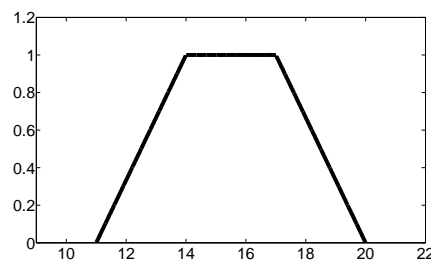
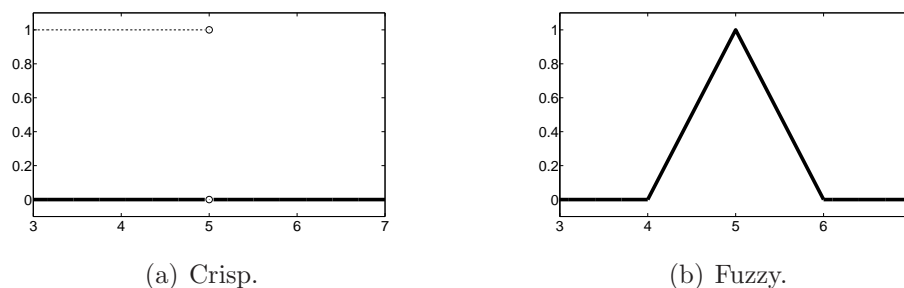


Figura 1.6: Número fuzzy trapezoidal.

O número fuzzy triangular pode ser visto como a generalização de um número real (Figura 1.7), e o número fuzzy trapezoidal como generalização de um intervalo fuzzy, chamado em algumas bibliografias de intervalo fuzzy (Figura 1.8) [13].



(a) Crisp.

(b) Fuzzy.

Figura 1.7: Comparativo entre número real e fuzzy.



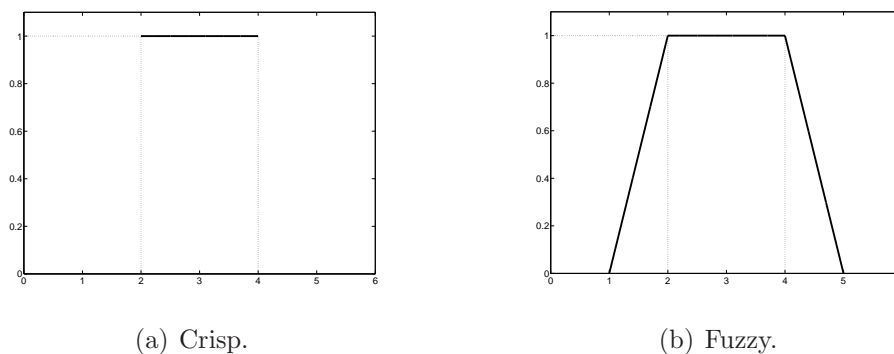


Figura 1.8: Comparativo entre intervalo crisp e fuzzy.

**Definição 1.13.** Um número fuzzy  $(F, \varphi_F)$  tem forma de sino se a função de pertinência  $\varphi_F$  for suave e simétrica em relação a um número real.

**Exemplo 1.13.1.** Seja  $(F, \varphi_F)$ , com  $\varphi_F$  definida como

$$\varphi_F(x) = \begin{cases} e^{-\frac{(x-u)^2}{a}} & \text{se } u - \delta \leq x \leq u + \delta, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$(F, \varphi_F)$  é um exemplo de um número fuzzy em forma de sino, e seu gráfico pode ser visto na figura 1.9.

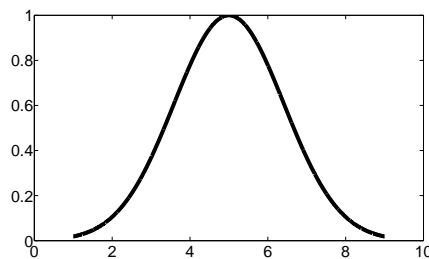


Figura 1.9: Número fuzzy em forma de sino.

## 1.6 Lógica Fuzzy

Aristóteles, fundador da ciência da lógica, criou um conjunto de regras baseadas em premissas e conclusões, para que estas pudessem ser classificadas como válidas ou não. Por exemplo, se “todo ser vivo é mortal” e “João é um ser vivo”, então podemos concluir que “João é mortal”. Tal lógica é considerada binária, isto é, uma declaração é classificada como verdadeira ou falsa, não podendo ser parcialmente verdadeira e parcialmente falsa ao mesmo tempo.

Essa dualidade é permitida na Lógica Fuzzy, estabelecendo que algo pode estar relacionado, de alguma forma, com o seu oposto. Verdadeiro ou falso, sim ou não, branco ou preto, podem ser respostas impossíveis de se apresentar a certas questões que surgem em nosso cotidiano. O dia está ensolarado? A camisa está branca?

A Lógica Fuzzy, com base na teoria de Conjuntos Fuzzy, permite trabalharmos com problemas cujas variáveis são imprecisas, subjetivas. Ela é capaz de obter informações incertas, geralmente descritas em uma linguagem natural, e transformá-las em uma linguagem numérica.

Para prosseguirmos, estenderemos o conceito de conectivos lógicos da lógica clássica para a lógica fuzzy.

### 1.6.1 Conectivos Lógicos

Para estudarmos lógica clássica será necessária a utilização dos conectivos lógicos *e*, *ou*, *não* e *então*, que serão “traduzidos” matematicamente para operadores do tipo  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\neg$ ,  $\Rightarrow$ :  $\{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ , respectivamente, onde 0 significa falso e 1 verdadeiro, e que são utilizados na modelagem matemática em sentenças do tipo:

“Se  $a$  é  $A$  então  $b$  é  $B$ ”.

A extensão de tais conectivos para o estudo da lógica fuzzy é obtida através das *normas* e *conormas* triangulares, que vamos definir a seguir.

**Definição 1.14.** O operador  $\Delta : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ,  $\Delta(x, y) = x\Delta y$ , é uma *t-norma* se satisfizer as seguintes condições:

- t1. condições de fronteira:*  $\Delta(1, x) = 1\Delta x = x$  e  $\Delta(0, x) = 0\Delta x = 0$ ;
- t2. comutativa:*  $\Delta(x, y) = x\Delta y = y\Delta x = \Delta(y, x)$ ;
- t3. associativa:*  $x\Delta(y\Delta z) = (x\Delta y)\Delta z$ ; e
- t4. monotonicidade:* se  $x \leq u$  e  $y \leq v$ , então  $x\Delta y \leq u\Delta v$ .

A operação t-norma  $\Delta$  estende o operador  $\wedge$  que modela o conectivo *e*.

**Exemplo 1.14.1.** Seja o operador

$$\Delta_1(x, y) = \min\{x, y\} = x \wedge y.$$

Mostremos que  $\Delta_1$  é uma t-norma.

**Demonstração:**

- t1.  $\min\{1, x\} = x$ , pois  $x \leq 1$ , e  $\min\{0, x\} = 0$ , pois  $x \geq 0$ ;
- t2.  $\min\{x, y\} = \min\{y, x\}$ ;
- t3.  $\min\{x, \min\{y, z\}\} = \min\{\min\{x, y\}, z\}$ ; e
- t4. se  $x \leq u$  e  $y \leq v$ , então  $\min\{x, y\} \leq \min\{u, v\}$ .

Portanto, o operador  $\Delta_1$  é uma t-norma.

**Definição 1.15.** O operador  $\nabla : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ,  $\nabla(x, y) = x\nabla y$  é uma t-conorma se satisfizer as seguintes condições:

- c1. condições de fronteira:  $\nabla(0, x) = 0\nabla x = x$  e  $\nabla(1, x) = 1\nabla x = 1$ ;
- c2. comutativa:  $\nabla(x, y) = x\nabla y = y\nabla x = \nabla(y, x)$ ;
- c3. associativa:  $x\nabla(y\nabla z) = (x\nabla y)\nabla z$ ; e
- c4. monotonicidade: se  $x \leq u$  e  $y \leq v$ , então  $x\nabla y \leq u\nabla v$ .

O operador t-conorma  $\nabla$  estende o operador  $\vee$  do conectivo *ou*.

**Exemplo 1.15.1.** Seja o operador  $\nabla_1 : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , definido como

$$\nabla_1(x, y) = \max\{x, y\}.$$

Mostremos que  $\nabla_1$  é uma t-conorma.

**Demonstração:**

- c1.  $\max\{0, x\} = x$  e  $\max\{1, x\} = 1$ , pois  $x \in [0, 1]$ ;
- c2.  $\max\{x, y\} = \max\{y, x\}$ ;
- c3.  $\max\{x, \max\{y, z\}\} = \max\{\max\{x, y\}, z\}$ ; e
- c4. se  $x \leq u$  e  $y \leq v$ , então  $\max\{x, y\} \leq \max\{u, v\}$ .

**Definição 1.16.** Uma aplicação  $\eta : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  é uma negação se satisfizer as seguintes condições:

- n1. condições de fronteiras:  $\eta(0) = 1$  e  $\eta(1) = 0$ ;
- n2. involução:  $\eta(\eta(x)) = x$ ; e

*n3. monotonicidade:  $\eta$  é decrescente.*

A aplicação  $\eta(x) = 1 - x$  é um exemplo de negação.

**Definição 1.17.** *Qualquer operação  $\Rightarrow: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  que reproduza a tabela verdade da implicação clássica é denominada implicação fuzzy.*

Um exemplo de implicação fuzzy é a implicação de Gödel:

$$(x \Rightarrow y) = g(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq y, \\ y & \text{se } x > y. \end{cases}$$

A tabela verdade da implicação clássica é mostrada na tabela 1.1.

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Tabela 1.1: Tabela verdade de  $\Rightarrow$

### 1.6.2 Variáveis Linguísticas

Uma variável linguística é aquela cujo valor é expresso por termos linguísticos, de natureza subjetiva, e expressos por funções de pertinência. Por exemplo, *a temperatura está alta*. Temos **temperatura** como sendo a variável linguística e **alta** como sendo o valor (atributo), que pode ser associado a uma função de pertinência. Sentenças em que temos uma variável linguística são chamadas de *proposições fuzzy*. Nosso interesse aqui são aquelas variáveis cujos termos linguísticos são caracterizados por números fuzzy. Mais informações podem ser encontradas em [9] e [6].

**Definição 1.18.** *Uma variável linguística  $X$  num universo  $U$  é uma variável cujos termos linguísticos assumidos por ela são subconjuntos fuzzy de  $U$ .*

### 1.6.3 Relação e Produto Cartesiano Fuzzy

Para prosseguirmos, precisaremos definir dois conceitos fundamentais: **relação fuzzy**, que nos indica o grau de relação entre dois elementos, e **produto cartesiano fuzzy**.

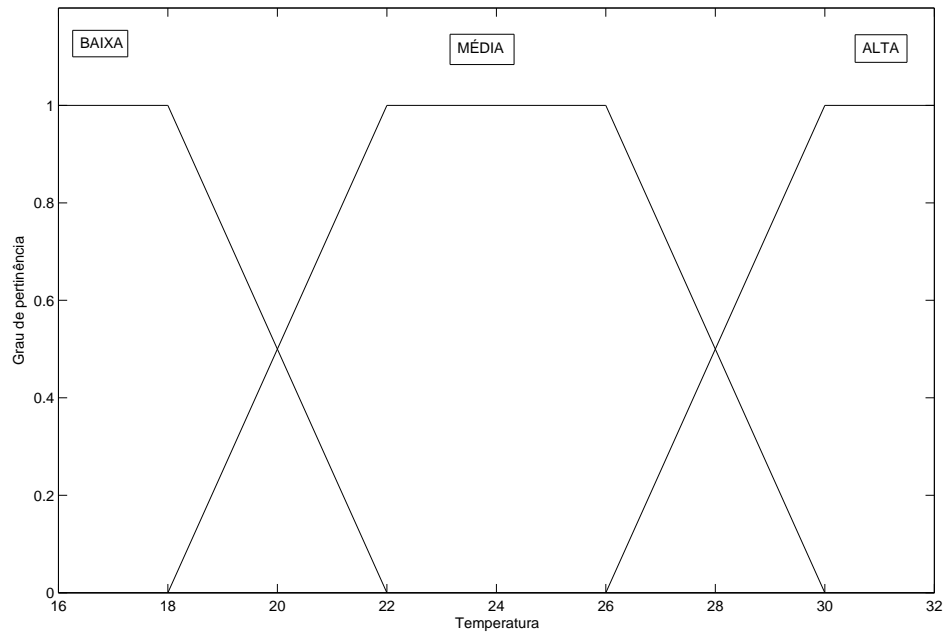


Figura 1.10: Variável linguística *temperatura*.

**Definição 1.19.** Uma relação fuzzy  $\mathbf{R}$  sobre  $U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n$  é qualquer subconjunto fuzzy de  $U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n$ . Assim, uma relação fuzzy  $\mathbf{R}$  é definida por uma função de pertinência  $\varphi_{\mathbf{R}} : U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n \rightarrow [0, 1]$ .

**Definição 1.20.** O produto cartesiano fuzzy dos subconjuntos fuzzy  $A_1, A_2, \dots, A_n$  de  $U_1, U_2, \dots, U_n$ , respectivamente, é a relação fuzzy  $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ , cuja função de pertinência é dada por:

$$\varphi_{A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi_{A_1}(x_1) \wedge \varphi_{A_2}(x_2) \wedge \cdots \wedge \varphi_{A_n}(x_n),$$

onde  $\wedge$  representa o mínimo.

Se o produto cartesiano for formado por apenas dois conjuntos,  $U_1 \times U_2$ , a relação é chamada de fuzzy binária sobre  $U_1 \times U_2$ .

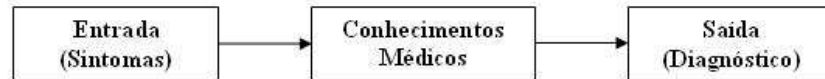
**Definição 1.21.** Considere  $R$  e  $S$  duas relações fuzzy binárias em  $U \times V$  e  $V \times W$ , respectivamente. A composição  $R \circ S$  é uma relação fuzzy binária em  $U \times W$  cuja função de pertinência é dada por:

$$\varphi_{R \circ S}(u, w) = \sup\{\min\{\varphi_R(u, v), \varphi_S(v, w)\}\}.$$

Mostraremos agora uma aplicação da teoria estudada até então.

## 1.7 Diagnóstico Médico

O objetivo de se trabalhar com Lógica Fuzzy e Diagnóstico Médico é tentar identificar a relação de uma pessoa com uma doença, segundo seus sintomas e sinais, avaliados por um médico especialista. Esse trabalho foi desenvolvido por Mariana Fernandes dos Santos Villela e Patrícia Borges dos Santos, da Universidade Federal de Uberlândia [21].



Considere os seguintes conjuntos universais:

$U$  = conjunto dos pacientes;

$V$  = conjunto dos sintomas; e

$W$  = conjunto das doenças.

Foram analisadas as informações de um médico especialista, dos quais obtivemos conhecimento de sete pacientes  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$  e  $P_7$ , com sintomas  $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8, s_9, s_{10}, s_{11}, s_{12}, s_{13}, s_{14}, s_{15}, s_{16}, s_{17}$  e  $s_{18}$ , que apresentaram os diagnósticos  $d_1, d_2, d_3$  e  $d_4$ , onde:

$s_1$ = pintas vermelhas no corpo;	$s_{10}$ = infecção das glândulas salivares;
$s_2$ = coceira;	$s_{11}$ = tosse seca;
$s_3$ = febre;	$s_{12}$ = coriza;
$s_4$ = cansaço;	$s_{13}$ = dor muscular;
$s_5$ = cefaléia;	$s_{14}$ = fraqueza;
$s_6$ = perda de apetite;	$s_{15}$ = dor ao mastigar ou engolir;
$s_7$ = rigidez na nuca;	$s_{16}$ = mal-estar;
$s_8$ = calafrios;	$s_{17}$ = vômito;
$s_9$ = confusão mental;	$s_{18}$ = dor de garganta.

$d_1$ = catapora; $d_2$ = caxumba; $d_3$ = coqueluche; $d_4$ = meningite.
---

$d/s$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	$s_5$	$s_6$	$s_7$	$s_8$	$s_9$	$s_{10}$	$s_{11}$	$s_{12}$	$s_{13}$	$s_{14}$	$s_{15}$	$s_{16}$	$s_{17}$	$s_{18}$
$d_1$	1,0	1,0	0,45	0,4	0,5	0,4	0,0	0,1	0,0	0,0	0,2	0,3	0,05	0,2	0,0	0,1	0,0	0,0
$d_2$	0,0	0,0	0,3	0,15	0,7	0,5	0,0	0,25	0,0	0,8	0,1	0,0	0,4	0,4	0,9	0,3	0,05	0,75
$d_3$	0,0	0,0	0,9	0,45	0,25	0,25	0,0	0,15	0,0	0,0	1,0	0,55	0,1	0,1	0,0	0,6	0,05	0,0
$d_4$	0,2	0,0	0,95	0,5	0,8	0,8	1,0	0,75	0,4	0,0	0,0	0,0	0,3	0,1	0,0	0,85	0,8	0,0

Tabela 1.2: Relação fuzzy R: sintomas  $\times$  doenças.

$P/s$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	$s_5$	$s_6$	$s_7$	$s_8$	$s_9$	$s_{10}$	$s_{11}$	$s_{12}$	$s_{13}$	$s_{14}$	$s_{15}$	$s_{16}$	$s_{17}$	$s_{18}$
$P_1$	0,0	0,0	0,7	0,5	0,1	0,2	0,0	0,5	0,0	0,0	1,0	0,5	0,1	0,5	0,0	0,0	0,0	0,0
$P_2$	0,0	0,0	0,5	0,7	0,9	0,5	0,9	0,3	0,9	0,0	0,5	0,1	0,6	0,5	0,0	0,8	0,7	0,0
$P_3$	0,0	0,0	0,5	0,3	0,8	0,7	0,0	0,2	0,0	1,0	0,5	0,2	0,3	0,5	0,9	0,7	0,0	0,8
$P_4$	1,0	0,8	0,9	0,3	0,0	0,7	0,0	0,3	0,0	0,0	0,0	0,0	0,2	0,3	0,0	0,1	0,0	0,0
$P_5$	1,0	0,5	0,9	0,2	0,0	0,1	0,0	0,5	0,0	0,0	0,0	0,5	0,1	0,2	0,0	0,0	0,0	0,0
$P_6$	0,0	0,0	0,2	0,2	0,1	0,1	0,0	0,1	0,0	0,0	1,0	0,3	0,1	0,1	0,0	0,1	0,0	0,0
$P_7$	0,0	0,0	0,1	0,1	0,1	0,1	0,0	0,1	0,0	0,0	1,0	0,5	0,1	0,1	0,0	0,1	0,3	0,0

Tabela 1.3: Relação fuzzy S: pacientes  $\times$  sintomas, elaborados por especialista.

Esses dados irão compor a base de conhecimentos que serão expressos por meio de relações fuzzy. A tabela 1.2 representa a relação fuzzy R onde seus valores indicam o grau com que cada sintoma está relacionado com cada doença. Esses valores são as médias aritméticas obtidas através de informações de dois especialistas. As colunas são os sintomas considerados e as linhas são as doenças.

A tabela 1.3 indica o grau com que cada sintoma se manifestou nos pacientes, dado por um especialista. A partir da relação fuzzy R é possível obter o diagnóstico médico de cada paciente, ou seja, o grau para cada paciente, por meio da fórmula:

$$u_{R(P_j)}(d_k) = \max_{1 \leq i \leq 18} [\min[u_R(d_k, s_i), u_{P_j}(s_i)]], \quad (1.1)$$

onde  $j=1, \dots, 7$  e  $k=1, \dots, 4$ .

$P/d$	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$d_4$
$P_1$	0,45	0,4	1,0	0,7
$P_2$	0,5	0,7	0,6	0,9
$P_3$	0,6	0,9	0,6	0,8
$P_4$	1,0	0,5	0,9	0,9
$P_5$	1,0	0,3	0,9	0,9
$P_6$	0,3	0,3	1,0	0,3
$P_7$	0,3	0,3	1,0	0,5

Tabela 1.4: Relação fuzzy D: pacientes  $\times$  doença.

Por exemplo, o diagnóstico do paciente  $P_1$ , via relação fuzzy R, é facilmente obtido através da equação 1.1. O paciente  $P_1$  pode ter a doença  $d_k$ ,  $k=1,\dots,4$  com os respectivos graus de possibilidades, considerando os sintomas dados pelo especialista:

$$u_{R(P_1)}(d_1) = \max_{1 \leq i \leq 18} [\min[u_R(d_1, s_i), u_{P_1}(s_i)]] = 0,45;$$

$$u_{R(P_1)}(d_2) = \max_{1 \leq i \leq 18} [\min[u_R(d_2, s_i), u_{P_1}(s_i)]] = 0,4;$$

$$u_{R(P_1)}(d_3) = \max_{1 \leq i \leq 18} [\min[u_R(d_3, s_i), u_{P_1}(s_i)]] = 1;$$

$$u_{R(P_1)}(d_4) = \max_{1 \leq i \leq 18} [\min[u_R(d_4, s_i), u_{P_1}(s_i)]] = 0,7.$$

Para obtermos os diagnósticos em forma matricial, basta fazermos o produto fuzzy, trocando-se a multiplicação por *min* e a soma por *max*, na multiplicação usual da matriz S pela matriz  $R^t$ , isto é,  $D = S * R^t$ , onde D representa o diagnóstico de cada paciente (Tabela 1.4). Os valores presentes na Tabela 3.3 indicam o grau com que cada paciente está relacionado com cada doença. As linhas são os pacientes considerados e as colunas são as doenças. Portanto, notamos que o paciente  $P_2$ , pela teoria aplicada, tem maior possibilidade de estar com meningite ( $d_4$ )

Segundo o médico especialista, os pacientes tinham as doenças com maior possibilidade apresentados na Tabela 1.4. Ressalta-se que a resposta da composição é também um conjunto fuzzy, ou seja, a composição nem sempre responde qual doença o paciente possui, porém fornece a distribuição de possibilidades no conjunto de sintomas.

Podemos ver que os pacientes  $P_1$ ,  $P_6$  e  $P_7$  teriam maior possibilidade de ter coqueluche, os pacientes  $P_4$  e  $P_5$  de ter catapora e o paciente  $P_3$ , caxumba.

Savergnini [17], utilizou um SBRF para prever os riscos de recidiva e progressão de tumores superficiais de bexiga. Castanho [3], [4] utilizou um modelo matemático para prever a evolução do câncer de próstata e descrever seu crescimento utilizando a teoria dos conjuntos fuzzy. Isso mostra que a teoria fuzzy e a lógica fuzzy são ferramentas poderosas para a modelagem de problemas relacionados a diagnóstico médico.



## Capítulo 2

# Sistemas Baseados em Regras Fuzzy

Em nosso cotidiano, enfrentamos situações no qual temos que tomar certas decisões que influenciarão totalmente no resultado final. Por exemplo, quando estamos com *fome*, decidimos o quanto iremos comer, dependendo da intensidade da fome. Tais decisões implicarão em tarefas a serem executadas, que podem ser traduzidas em um conjunto de regras: se estiver com *pouca* fome, devo comer *pouco*.

Um Sistema Baseado em Regra Fuzzy tenta, a grosso modo, representar matematicamente uma situação a fim de obter respostas a algum tipo de problema. Mais precisamente, um Sistema Baseado em Regras Fuzzy (SBRF) é aquele que se utiliza da lógica fuzzy para produzir saídas (respostas) para cada entrada fuzzy (problema). Quando a *entrada* e a *saída* representam a *condição* e a *ação*, respectivamente, chamamos o SBRF de **Controlador Fuzzy**, que tenta reproduzir a estratégia de um controlador humano, levando-se em conta que as ações humanas são em geral execuções de tarefas que seguem uma sequência de ordem linguísticas, traduzidas por um conjunto de regras [16], [12].

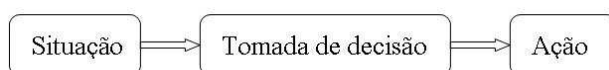


Figura 2.1: Controlador Fuzzy

### 2.1 Controlador Fuzzy

Um controlador fuzzy é composto pelos módulos de fuzzificação, de base de regras, de inferência fuzzy e de defuzzificação, como podemos ver no esquema da figura 2.2. A seguir, explicaremos o que desempenha cada módulo de um Controlador Fuzzy.

#### 2.1.1 Módulo de fuzzificação

Nesta etapa, as entradas do sistema são modeladas por conjuntos fuzzy, isto é, associa-se cada entrada a uma função de pertinência. Se a entrada for crisp, ela será associada a sua

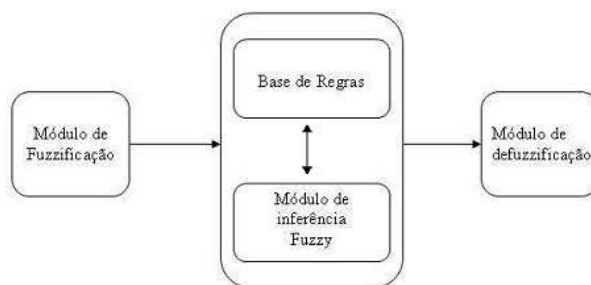


Figura 2.2: Módulos de um controlador fuzzy.

função característica.

### 2.1.2 Módulo da base de regras

Uma base de regras fuzzy é formada por proposições fuzzy, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{Se } x_1 \text{ é } A_1 \text{ e } x_2 \text{ é } A_2 \text{ e } \dots \text{ e } x_n \text{ é } A_n \text{ então} \\ u_1 \text{ é } B_1 \text{ e } u_2 \text{ é } B_2 \text{ e } \dots \text{ e } u_m \text{ é } B_m, \end{aligned}$$

onde as variáveis linguísticas  $x_i$  são modeladas por conjuntos fuzzy  $A_i$  (funções de pertinência). Quando dizemos que  $x_i$  é  $A_i$  queremos dizer que a pertinência de  $x_i$  é tomada em  $A_i$ .

O conjunto das condições  $A_1, A_2, \dots, A_n$  é chamado de *antecedentes*, e o conjunto das ações  $B_1, B_2, \dots, B_m$  é chamado de *consequentes*. Quanto mais informações temos das condições, mais preciso será o resultado.

### 2.1.3 Módulo de inferência fuzzy

Aqui definem-se quais serão os conectivos lógicos usados para estabelecer a relação fuzzy que modela a base de regras. Este módulo fornecerá a saída a ser adotada pelo controlador a partir de cada entrada. O método de inferência usa as t-normas e t-conormas para traduzir matematicamente as sentenças da base de regras, que são ligadas pelos conectivos **e** e **ou**. Iremos utilizar o método de inferência de Mamdani, que segue o seguinte procedimento:

1. em cada regra  $R_j$ , da base de regras fuzzy, a condicional “se  $x$  é  $A_i$  então  $u$  é  $B_i$ ” é modelada pela aplicação  $\wedge$  (mínimo);
2. adota-se a t-norma  $\wedge$  para o conectivo lógico **e**;

3. para o conectivo lógico **ou** adota-se a t-conorma  $\vee$  (máximo) que conecta as regras fuzzy da base de regras.

Formalmente, a relação fuzzy  $\mathbf{R}$  (que é a relação que modela a base de regras) é o subconjunto fuzzy de  $X \times U$ , cuja função de pertinência é dada por

$$\varphi_{\mathbf{R}}(x, u) = \max_{1 \leq i \leq r}(\varphi_{R_i}(x, u)) = \max_{1 \leq i \leq r}[\varphi_{A_i}(x) \wedge \varphi_{B_i}(u)],$$

no qual  $x$  representa o estado e  $u$  representa o controle,  $r$  é o número de regras que compõem a base de regras, e  $A_i$  e  $B_i$  são os subconjuntos fuzzy da regra  $i$ . Cada um dos valores  $\varphi_{A_i}(x)$  e  $\varphi_{B_i}(u)$  é interpretado como o grau com que  $x$  e  $u$  estão nos subconjuntos fuzzy  $A_i$  e  $B_i$ , respectivamente.

Para ilustrar como funciona o método de inferência de Mamdani, vamos utilizar duas regras genéricas que têm duas entradas e uma saída:

$$R_1: \text{Se } x \text{ é } A_1 \text{ e } y \text{ é } B_1 \text{ então } z \text{ é } C_1,$$

$$R_2: \text{Se } x \text{ é } A_2 \text{ e } y \text{ é } B_2 \text{ então } z \text{ é } C_2,$$

e mostrar a inferência graficamente (Figura 2.3).

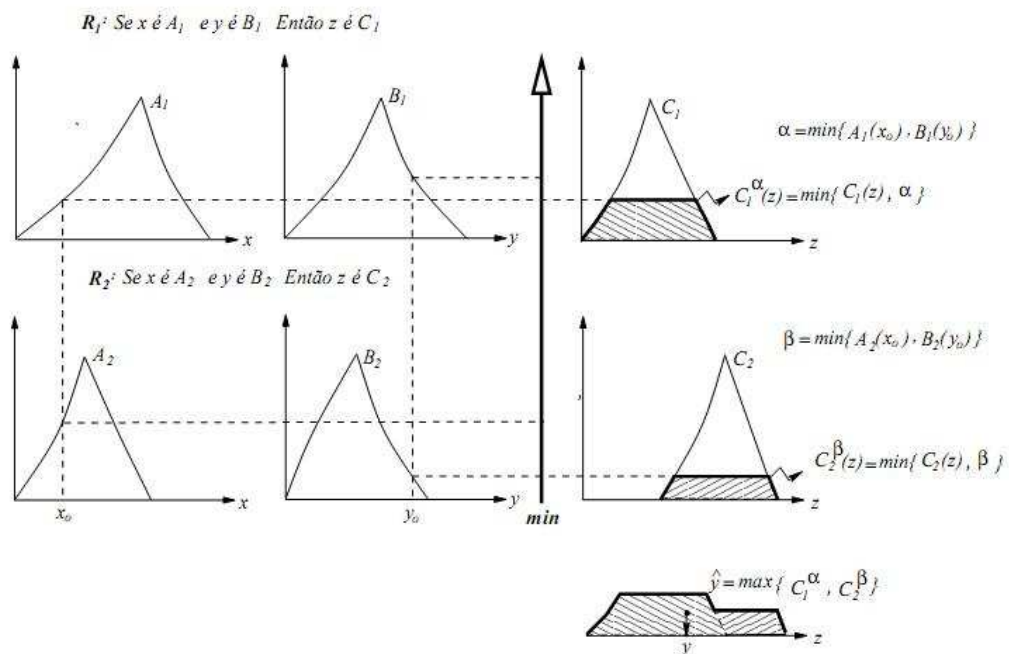


Figura 2.3: Método de Mamdani.

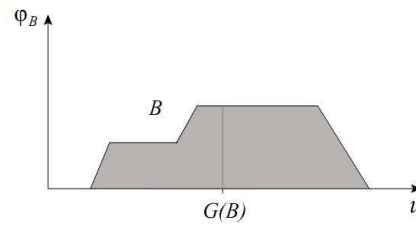


Figura 2.4: Defuzzificador centro de gravidade  $G(C)$ . [1]

#### 2.1.4 Módulo de Defuzzificação

No controlador fuzzy, a cada entrada, o módulo de inferência produz uma saída fuzzy que indica o controle a ser adotado. O defuzzificador converte tal saída fuzzy em um número real. Adotaremos um método específico de defuzzificação, chamado **centro de gravidade**, também conhecido como centróide ou centro de área. Esse método nos dá a média das áreas de todas as figuras que representam os graus de pertinência de um subconjunto fuzzy.

Outros métodos de defuzzificação podem ser adotados. Um número real que de alguma maneira possa representar razoavelmente o conjunto fuzzy de saída pode ser chamado de um defuzzificador. Métodos mais conhecidos, como Centro de Máximo, onde é levado em conta apenas as regiões de maior possibilidade, e Média dos Máximos, que utiliza a média dos elementos de maior pertinência, podem ser encontrados em [1] e [13].

##### Módulo de defuzzificação Centro de Gravidade

Esse método de defuzzificação é semelhante à média aritmética ponderada para uma distribuição de dados, com a diferença que os pesos aqui são os valores  $\varphi_B(u_i)$ , que indicam o grau de compatibilidade do valor  $u_i$  com o conceito modelado pelo conjunto fuzzy  $B$ .

Se o domínio for discreto, temos a seguinte equação:

$$G(B) = \frac{\sum_{i=0}^n u_i \varphi_B(u_i)}{\sum_{i=0}^n \varphi_B(u_i)}.$$

E, caso o domínio seja contínuo, temos a seguinte equação:

$$G(B) = \frac{\int_{\mathbb{R}} u \varphi_B(u) du}{\int_{\mathbb{R}} \varphi_B(u) du}. \quad (2.1)$$

Um exemplo é mostrado na Figura 2.4.

## Capítulo 3

# Aplicações de Sistemas Baseados em Regras Fuzzy

Nesta seção, apresentaremos algumas aplicações de SBRF, como: Cerâmica Vermelha e Empreendedorismo. A primeira aplicação é relacionado à cerâmica vermelha, onde o objetivo é identificar a qualidade da cerâmica produzida, baseando-se nas diversas variáveis como: plasticidade, queima, etc. Essa aplicação foi baseada no trabalho de Neto e Castanho [10].

Em seguida, mostramos um modelo matemático que tenta classificar pessoas quanto à aptidão ao empreendedorismo, isto é, identificar se uma pessoa está apta ou inapta para abrir uma empresa. Contamos com a ajuda de um analista do Sebrae/PA, que nos ajudou a construir a base de regras.

### 3.1 Cerâmica Vermelha

A produção de cerâmica vermelha depende da argila utilizada em sua fabricação, do processo de secagem e da queima das peças. Caso uma etapa seja mal executada, a qualidade do produto final será influenciada. Os ceramistas e oleiros têm buscado melhorar essa qualidade, controlando a matéria-prima utilizada e o modo de preparo até o produto final. Este trabalho foi elaborado por Adriano Alves da Cruz Neto e Maria José de Paula Castanho, da Unicentro [10]

Para a avaliação da qualidade do produto final, foi construído um modelo matemático, considerando a matéria prima e o processo de fabricação. As informações utilizadas pelos ceramistas são dadas em termos subjetivos como “argila pouco plástica”, “temperatura alta”, “baixa umidade”.

O objetivo é avaliar, por meio de um sistema baseado em regras fuzzy, a qualidade da cerâmica produzida, considerando a fabricação adequada desse produto, o que representa um desafio constante para os ceramistas da região.

O processo de fabricação de produtos cerâmicos compreende, de uma maneira geral, seis fases, como mostra a figura a seguir.

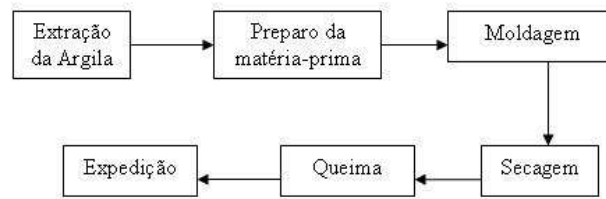


Figura 3.1: Processo de fabricação da cerâmica.

### Extração da Argila

No processo produtivo, a argila é extraída por retroescavadeira e levada ao depósito, onde é feita a mistura de argilas com diferentes graus de plasticidade. Fica, então, estocada a céu aberto aproximadamente oito meses para que as impurezas sejam eliminadas com o tempo.

A argila, ou massa a ser utilizada na fabricação, é medida quanto ao grau de plasticidade e sua granulometria, o que informa se possui uma porcentagem alta ou baixa de água na conformação. Quanto menos plástica e com granulometria grossa, menor porcentagem de água tem a massa, o que acarreta a aceleração da secagem.

A argila é classificada de acordo com o percentual de água na conformação. Essa classificação está descrita na tabela seguinte.

Tipo de Massa	% de água na conformação
Pouco plástica e de granulometria grossa	17 - 22
Medianamente plástica e de granulometria fina	22 - 28
Muito plástica e de granulometria finíssima	26 - 34

Tabela 3.1: Percentual de água na conformação [10].

Se a massa tiver baixo nível de plasticidade, a peça fica suscetível a trincas, por isso não pode ter uma secagem rápida.

### Preparo da matéria-prima

Do depósito de argila, o material é carregado manualmente a uma correia transportadora que o conduzirá até o misturador onde é efetuada a mistura de argila e água para facilitar a moldagem. Do misturador, a argila segue ao laminador para triturar por esmagamento todas

as pedrinhas ou torrões ainda não desfeitos, a fim de tornar uma massa homogênea suscetível à conformação.

### **Moldagem**

O material laminado é transportado para a maromba (máquina de fabricar tijolos) a vácuo, de onde a massa sai, através dos orifícios da boquilha, que é o molde dos tijolos. O bloco de argila já em forma, saído da boquilha, corre sobre os rolos de uma máquina cortadora automática que o corta no tamanho desejado.

### **Secagem**

Após a conformação, os tijolos recém-moldados são transportados para as prateleiras, lugares de franco acesso de ar e protegidos de muitos ventos e raios de sol, onde são submetidos à secagem natural.

A secagem é um processo lento, pois depende totalmente de condições atmosféricas como umidade do ar e temperatura ambiente. A perda de umidade é acompanhada pela contração do produto, sendo essa proporcional ao grau de umidade da argila.

A umidade relativa do ar na região estudada é de 70% em média, porém as mudanças climáticas são bruscas. Devemos ressaltar que, quando a umidade relativa do ar está demasiadamente baixa, ela acarreta uma diferença de velocidade de secagem entre a superfície e o interior da peça, provocando defeitos, tais como: rupturas (trincas e quebras), empenamento, dentre outros.

A umidade do produto que sai da secagem para a queima é controlada usualmente através do tato, fazendo-se pressão sobre o produto com a unha, ou pela cor do material (que deve estar clara ou esbranquiçada).

### **Queima**

Concluída a secagem natural, as peças são submetidas a um tratamento térmico a tempe-

raturas elevadas. Nessa operação, também conhecida como sinterização, o material cerâmico irá adquirir as propriedades para o uso, como: dureza, resistência mecânica, resistência às intempéries e aos agentes químicos.

As peças secas são transportadas em carrinhos e vagonetas para o interior de fornos a fim de que a queima se processe de forma homogênea. No forno são empilhadas, conforme a maneira de cada ceramista, aí permanecendo por 2 a 3 dias. Este período de tempo é devido à necessidade de que os produtos sejam aquecidos lentamente até que atinjam a temperatura ideal de queima, sejam queimados, e resfriados.

A temperatura e o tempo são os principais determinantes das condições e qualidade da queima das peças cerâmicas. Nesse processo, é fundamental o rigor no controle do tempo de ciclo de aquecimento, queima e resfriamento. A não-adequação do tempo de queima pode acarretar em deformações, fissuras e quebra de peças, além de peças cruas no caso de temperaturas muito baixas. A temperatura ideal para a queima está entre  $900^{\circ}\text{C}$  e  $1000^{\circ}\text{C}$ .

É importante um rígido controle de aquecimento até atingir a temperatura máxima desejada, para evitar o aparecimento de defeitos ou inutilização do produto. Normalmente, o tempo necessário é de: 10-30 horas para o aquecimento, 6-8 horas de temperatura máxima ( $900^{\circ}\text{C}$  a  $1100^{\circ}\text{C}$ ) e 6-25 horas para resfriamento.

O tempo prolongado a altas temperaturas faz com que as peças requeimem: o tijolo fica com cor preta e ocorre grande retração de tamanho, mas a qualidade ainda é boa. Então, o ideal é queimar as peças na temperatura máxima durante 6 a 8 horas, dependendo do grau de secagem.

As peças bem secas fazem com que o aquecimento seja mais rápido e chegam a queimar com 4 horas; as peças mais úmidas no máximo com 10 horas.

## **Expedição**

A expedição é a última etapa do processo produtivo. Nessa etapa, ocorre o controle de qualidade para envio ao mercado.

### **3.1.1 Modelagem**

O sistema fuzzy irá controlar as etapas de secagem e queima, pois são fundamentais para a qualidade do produto final. Como a secagem depende do tipo de argila e das condições climáticas, consideramos as seguintes variáveis de entrada:



1. argila: classificada em irregular, boa e ótima. A argila com pouca plasticidade e granulometria grossa é irregular; mediamente plástica e com granulometria fina é boa; muito plástica e granulometria finíssima é ótima. O conjunto universo dessa variável é o intervalo  $[0; 0,5]$  que indica o percentual de água na conformação da massa;
2. temperatura ambiente: classificada em baixa, média e alta. O universo é o intervalo  $[-4; 40]$  em que varia a temperatura da região durante o ano;
3. umidade relativa do ar: classificada em baixa, média e alta. A umidade é dada pela razão entre a pressão de vapor de água na atmosfera e a pressão de vapor de água saturado, no intervalo  $[0, 1]$ , que consideramos como universo desta variável; e
4. tempo de secagem: curto, médio e prolongado. O universo é o intervalo  $[0; 30]$  indicando o número de dias que as peças levam para secar.

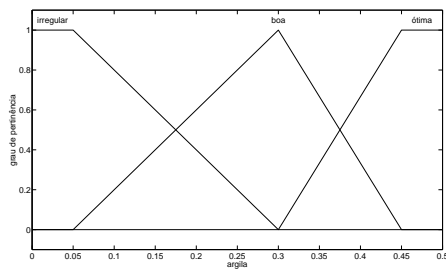
A figura 3.2 mostra as funções de pertinência dessas variáveis. A variável de saída “secagem” foi classificada em regular, boa e ótima. Regular para as peças pouco secas, boa para a peça mediamente seca, e ótima para as peças muito secas. O domínio é o intervalo entre  $[0; 1]$ . Veja Figura 3.3.

A base de regras do sistema foi elaborada com o auxílio de ceramistas e oleiros da região. Contém 81 regras e algumas delas estão descritas na Tabela 3.2.

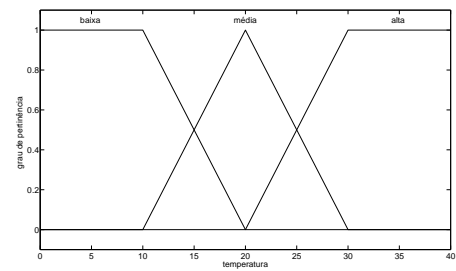
Argila	Temperatura Ambiente	Umidade relativa	Tempo de Secagem	Secagem
irregular	baixa	baixa	curto	regular
irregular	média	baixa	curto	regular
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
boa	baixa	alta	médio	regular
boa	alta	média	médio	ótima
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
ótima	média	alto	curto	boa
ótima	alta	alta	prolongado	ótima

Tabela 3.2: Base de Regras do sistema que avalia a secagem da cerâmica [10].

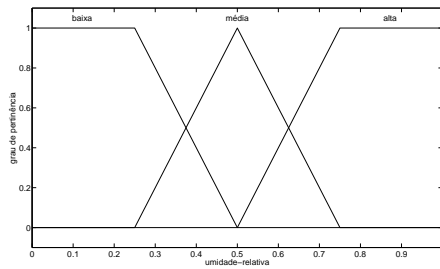
A saída do sistema é encontrada utilizando o método de inferência de Mamdani e o método de defuzzificação do centro de gravidade. Como a secagem é uma etapa intermediária do processo, para avaliar a qualidade final do produto, formaremos um novo sistema fuzzy, utilizando como variáveis de entrada: secagem, o tempo de aquecimento e tempo de queima, e como variável de saída, a qualidade. O sistema está representado na Figura 3.4.



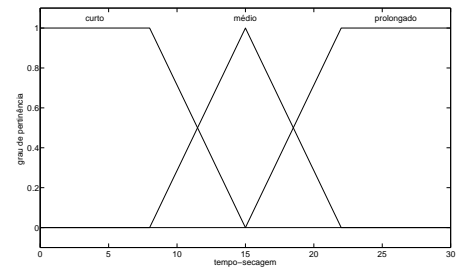
(a) Argila.



(b) Temperatura.



(c) Umidade Relativa.



(d) Tempo Secagem.

Figura 3.2: Funções de pertinência.

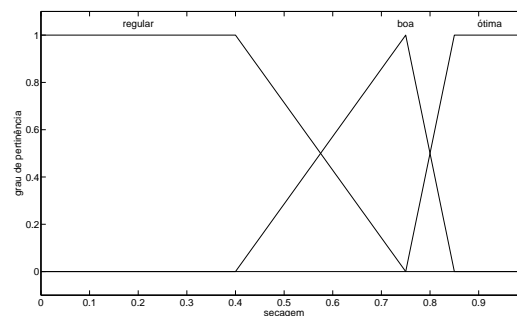


Figura 3.3: Funções de pertinência da variável de saída Secagem.

A qualidade depende do grau da secagem, do tempo de aquecimento, e do tempo em que são queimadas as peças. As funções de pertinência dessas variáveis estão representadas na figura 3.5.

1. Secagem: classificada em regular, boa e ótima.
2. Tempo de aquecimento: classificado em rápido, médio e lento. Conforme o número de horas em que as peças atingem a temperatura ideal de queima, num intervalo de  $[10, 30]$ ;
3. Tempo de queima: classificado em curto, médio e prolongado. Dependendo do número

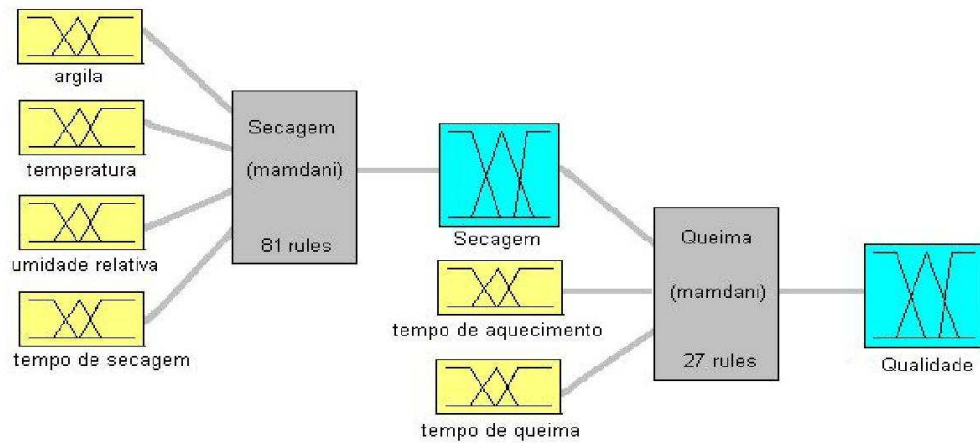
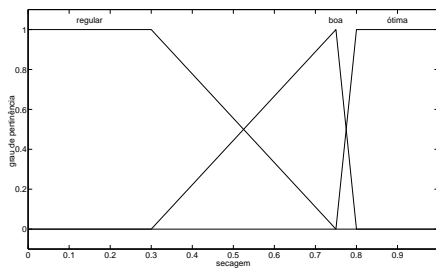
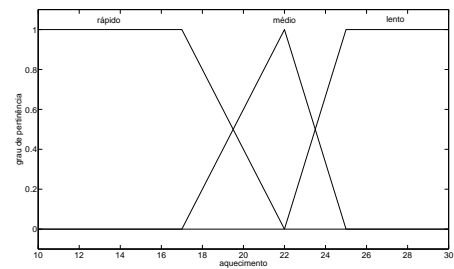


Figura 3.4: Estrutura do SBRF para avaliar a qualidade do produto.

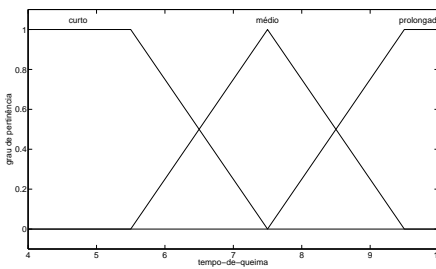
de horas que a peça precisa queimar com temperatura máxima, num intervalo de [4, 10].



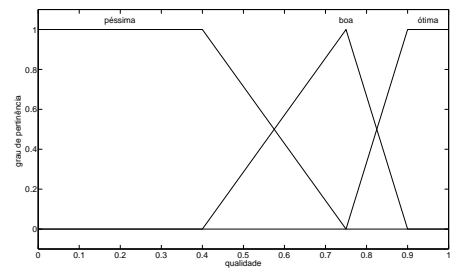
(a) Secagem.



(b) Tempo de aquecimento.



(c) Tempo de queima.



(d) Qualidade.

Figura 3.5: Funções de pertinência.

A base de regras também foi construída com a informação dos ceramistas e oleiros da região (tabela 3.3).

Secagem	Tempo de Aquecimento	Tempo de Queima	Qualidade
regular	rápido	curto	péssima
regular	médio	médio	boa
⋮	⋮	⋮	⋮
boa	rápido	curto	péssima
boa	médio	prolongado	ótima
⋮	⋮	⋮	⋮
ótima	rápido	médio	ótima
ótima	lento	prolongado	boa

Tabela 3.3: Base de regras do sistema que avalia a qualidade da cerâmica.

### 3.1.2 Simulações

As primeiras simulações foram feitas considerando a argila irregular para a fabricação das peças, alterando valores para temperatura ambiente, umidade relativa e tempo de secagem. No inverno, com temperatura de 10°C e fabricação com argila irregular, obtivemos grau de secagem de 70%; para isso o tempo de secagem foi considerado prolongado e a umidade relativa baixa ou média. Se tivéssemos temperatura ambiente de 14°C, mantendo as outras variáveis constantes, a secagem seria de 72,6%.

Com temperatura média, obtivemos grau de secagem de 90% para umidade relativa baixa e tempo de secagem prolongado, 25 dias; porém não é viável deixar tanto tempo secando as peças. Reduzindo para 15 dias ainda temos um grau de secagem de 70%. Basta aquecer lentamente no forno com tempo de queima médio de 7h30min para obtermos uma qualidade de 83,3%. Deixando secar 25 dias, a qualidade chegaria a 88%. Já no verão, com temperatura alta, basta que as peças fiquem 15 dias para que o grau de secagem seja 70% para qualquer umidade. Para secagem de 90%, aquecimento e tempo de queima médio, a qualidade resulta em 90,6%.

Nem sempre uma taxa de secagem boa ou ótima resulta em boa qualidade. Isso ocorre quando se prolonga o tempo de queima, como na simulação a seguir: secagem de 78,4%, aquecimento de 21 horas e 7 horas e 30 min de queima obtemos 90% de qualidade. Já com 9 horas de queima a qualidade diminui para 77,5%. No verão, bastam 2 semanas para que as peças fabricadas com argila boa obtenham 81% de taxa de secagem; com 3 semanas a taxa chega a 90%. Num período curto, 7 dias, com umidade relativa baixa a secagem chega a 53%. Esta taxa permite que a cerâmica seja levada ao forno com aquecimento lento obtendo uma qualidade de 70%.

Consideremos agora a argila ótima para a fabricação das peças. No inverno, a argila considerada ótima é a que menos seca devido à sua plasticidade, pois quanto mais plástica,

mais água contém a massa. Para que a taxa de secagem chegue a 89%, deve-se deixar 23 dias secando com umidade relativa baixa. A umidade relativa alta no inverno é o pior momento dos ceramistas. Foi encontrada uma secagem de apenas 65% para umidade relativa alta (0,87) e 27 dias de secagem.

No verão, com temperatura média ou alta, basta a umidade relativa não ser alta que a secagem fica acima de 74% com apenas uma semana de secagem, e a qualidade varia conforme o aquecimento e o tempo de queima, mas sempre um valor mínimo de 89,2%. Percentuais de 75% para qualidade e 70% para secagem são considerados bons para a produção da cerâmica vermelha.

Estas simulações são coerentes com os resultados obtidos pelos ceramistas da região. Desta forma, o sistema baseado em regras fuzzy construído será útil aos ceramistas porque permite simular o tempo necessário para a secagem e queima da cerâmica, dependendo das condições climáticas para produzir o produto final com qualidade.

## 3.2 Empreendedorismo

Abrir uma empresa requer algumas competências pessoais que podem fazer diferença para que o negócio tenha sucesso. É preciso que alguns fatores estejam presentes, como os conhecimentos, as habilidades e atitudes empreendedoras. São características decisivas para quem pretende se aventurar pelo mundo dos negócios. Um dos fatores importantes para a sobrevivência e desenvolvimento das empresas é o espírito empreendedor que, com características bem desenvolvidas, farão com que a pessoa tenha mais condições de viabilizar a empresa.

De forma genérica, empreendedorismo costuma ser definido como o processo pelo qual indivíduos iniciam e desenvolvem novos negócios. Considerado dessa forma, o empreendedorismo é tido como um complexo fenômeno envolvendo o empreendedor, a empresa e o ambiente no qual ele ocorre. Um empreendedor tanto pode ser uma pessoa que inicie sua própria empresa, como alguém comprometido com a inovação em empresas já constituídas. O empreendedorismo, em empresas novas ou já há algum tempo estabelecidas, é o fator que permite que os negócios sobrevivam e prosperem num ambiente econômico de mudanças. [20]

Em [2] o autor também estuda um modelo de empreendedorismo utilizando teoria fuzzy, mas através de uma abordagem distinta da nossa. Entre as várias diferenças podemos destacar que o referido autor utiliza em seu trabalho, apenas três características empreendedoras enquanto nosso trabalho contempla oito características.

Para a análise que iremos fazer, utilizaremos um SBRF a fim de classificarmos pessoas quanto a sua aptidão para ser um empreendedor.

### Modelagem

#### 1. Primeira Abordagem

Para avaliarmos se uma pessoa tem características empreendedoras ou não, iremos estudar as seguintes características, com seus respectivos conceitos e média nacional.

- (a) Competência Estratégica: indica sua capacidade e confiança para articular recursos e pessoas em direção a um objetivo profissional e de negócios maior. Média Nacional: 8.8.
- (b) Planejamento Formal: planejamento formal corresponde ao quanto o empreendedor busca formalizar procedimentos e planejar as atividades do seu negócio. Média Nacional: 8.0.

- (c) Risco: corresponde a disposição e aceitação de riscos calculados na sua vida profissional. Média Nacional: 8,8.
- (d) Relacionamento: corresponde ao carisma ao lidar com colegas de trabalho ,funcionários, clientes e fornecedores. Média Nacional: 8,4.
- (e) Pensamento Analítico: O Pensamento Analítico é a capacidade de avaliar contextos de forma holística, usando a lógica e a razão ao abordar um problema. Média Nacional: 8,4.
- (f) Desafio: é o desejo e motivação em superar limites e concorrentes, buscando ser sempre o melhor naquilo que faz. Média Nacional: 7,9.
- (g) Inovação: representa a criatividade e espírito de inovação do empreendedor. Média Nacional: 7,4.
- (h) Dedicção: corresponde à disposição do empreendedor se dedicar e abrir mão da vida pessoal pelo sucesso nos negócios. Média Nacional: 6,8.

Tais características foram extraídas da Pesquisa PPE - Perfil do Potencial Empreendedor, do Sebrae/MG [20]. As 5 características mais relevantes na pesquisa foram: competência estratégica, planejamento formal, risco, relacionamento e pensamento analítico. Nesta primeira abordagem iremos utilizar estas 5 características e, posteriormente, usaremos as 8 características. É importante observar que essa avaliação é apenas um exemplo da teoria que estudamos aqui. Para uma avaliação mais detalhada consulte [20].

Para realizarmos esse trabalho, precisaremos construir uma base de regras. Neste primeiro caso serão 243 regras. O antecedente será constituído pelas 5 entradas: *competência estratégica, risco, planejamento formal, relacionamento e pensamento analítico*, que poderão assumir os valores **baixa, média e alta**. O conseqüente terá 3 saídas: *apto a ser empreendedor, inapto a ser empreendedor e possibilidade de vir a ser empreendedor*.

As regras foram construídas com a ajuda de um analista do Sebrae, Roberto Bellucci, que nos auxiliou a montar todas as regras e a ajustar as funções de pertinência. Algumas destas regras estão ilustradas na tabela 3.4.

A tabela 3.5 mostra o resultado obtido por algumas pessoas que procuraram o Sebrae com o objetivo de abrir uma empresa, no período de 13 de abril a 6 de maio, na sede do Sebrae/PA, em Belém.

Competência Estratégica	Planejamento Formal	Risco	Relacionamento	Pensamento Analítico	Resultado
Baixa	Baixa	Baixa	Baixa	Baixa	Inapto
Baixa	Baixa	Baixa	Baixa	Média	Inapto
Baixa	Baixa	Baixa	Baixa	Alta	Inapto
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
Média	Média	Média	Média	Baixa	Possibilidade
Média	Média	Média	Média	Média	Apto
Média	Média	Média	Média	Alta	Apto
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
Alta	Alta	Alta	Alta	Baixa	Apto
Alta	Alta	Alta	Alta	Média	Apto
Alta	Alta	Alta	Alta	Alta	Apto

Tabela 3.4: Base de Regras: empreendedorismo.

Comp. Estratégica	Planej. Formal	Risco	Relacionamento	Pens. Analítico	Resultado
Médio	Médio	Alto	Médio	Médio	Apto
Alto	Médio	Baixo	Médio	Médio	Possibilidade
Médio	Alto	Alto	Médio	Médio	Apto
Baixo	Médio	Alto	Alto	Médio	Possibilidade
Alto	Alto	Alto	Médio	Médio	Apto

Tabela 3.5: Resultados

## 2. Segunda Abordagem

Outra maneira de tratarmos essa avaliação é criarmos funções de pertinência (Figura 3.6) para cada uma das características empreendedoras, e montarmos um SBRF que represente nosso problema.

Para isso, utilizamos o Toolbox Fuzzy do software Matlab, com método de inferência de Mamdani e de defuzificação centro de gravidade.

A base de regras é composta por 256 regras: o antecedente é composto por 8 características empreendedoras (planejamento formal, desafio, inovação, competência estratégica, risco, relacionamento, dedicação e pensamento analítico), e o consequente é a condição final (apto, inapto ou possibilidade). Cada característica irá receber uma nota e, de acordo com as funções de pertinência (figura 3.6), será considerada como “presente” ou “ausente”. Novamente, a base de regras foi construída com um especialista no assunto.

A tabela abaixo mostra o resultado de algumas pessoas que procuraram o Sebrae/PA entre o mês de março e abril a fim de iniciarem seus próprios negócios. Segundo nosso programa, o resultado dessas pessoas foram:

A Figura 3.7 mostra o programa feito no Matlab para facilitar a pesquisa. Nele, basta entrarmos com os valores obtidos na pesquisa para obtermos o resultado.

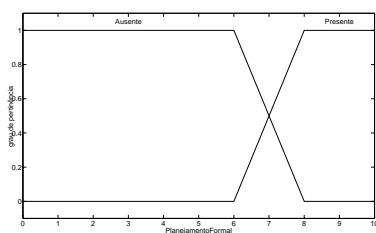
## Conclusão

Ao analisarmos o perfil empreendedor de uma pessoa, por meio de pesquisa, um indivíduo poderá detectar se tem condições para ser empreendedor e em qual característica

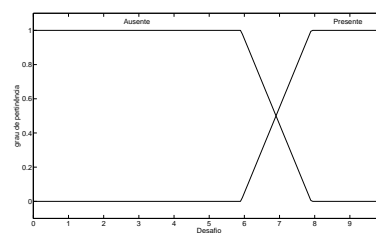


Planej.	Formal	Desafio	Inovação	Comp.	Estratégica	Risco	Relac.	Dedicação	Pens.	Análítico	Resp.
8	7.5	9	9	8	8	8	9.5	7.5	7	7	Possib.
6	7.5	6.5	6.5	8	8	7	8.5	7.5	8	8	Possib.
8	9	7	7	8	8	8.5	8	9	9	9	Apto
9	9	8.5	8.5	9	9	8	8.5	9	8	8	Apto
6	7	6.5	6.5	6	6	7.5	6	7	6	6	Inapto
9	7.5	8.5	8.5	8	8	7	7.5	8	8.5	8.5	Possib.
6	6.5	7	7	7	7	6.5	7.5	8	7.5	7.5	Inapto
8	8	9	9	9.5	9.5	9	8.5	8	8	8	Apto
6	8	8	8	6.5	6.5	8	6.5	7	7.5	7.5	Possib.
8	7.5	8.5	8.5	8	8	9	8.5	7.5	8	8	Apto
6	6.5	6.5	6.5	6	6	7	8	7.5	8	8	Possib.

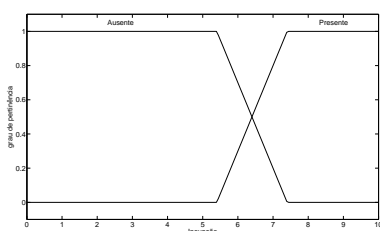
deverá desenvolver mais o seu potencial. A análise destas características é subjetiva e daí a pertinência de se modelar matematicamente tais problemas via teoria dos conjuntos fuzzy. Neste trabalho utilizamos um sistema baseado em regras fuzzy no qual, a partir da avaliação de cada característica relevante de empreendedorismo, obtivemos uma avaliação da aptidão do potencial empreendedor.



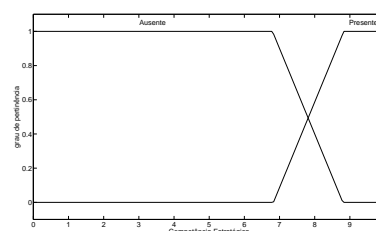
(a) Planejamento formal.



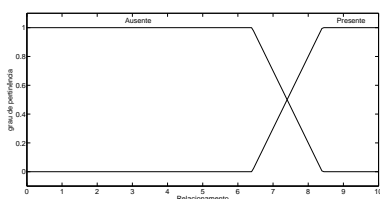
(b) Desafio.



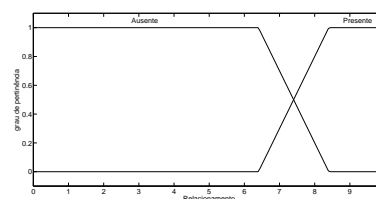
(c) Inovação.



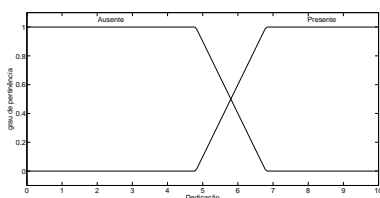
(d) Competência estratégica.



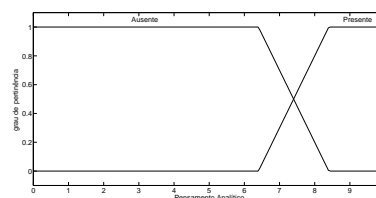
(e) Risco.



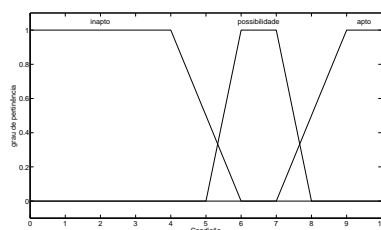
(f) Relacionamento.



(g) Dedicacão.



(h) Pensamento analítico.



(i) Condição final.

Figura 3.6: Funções de pertinência.

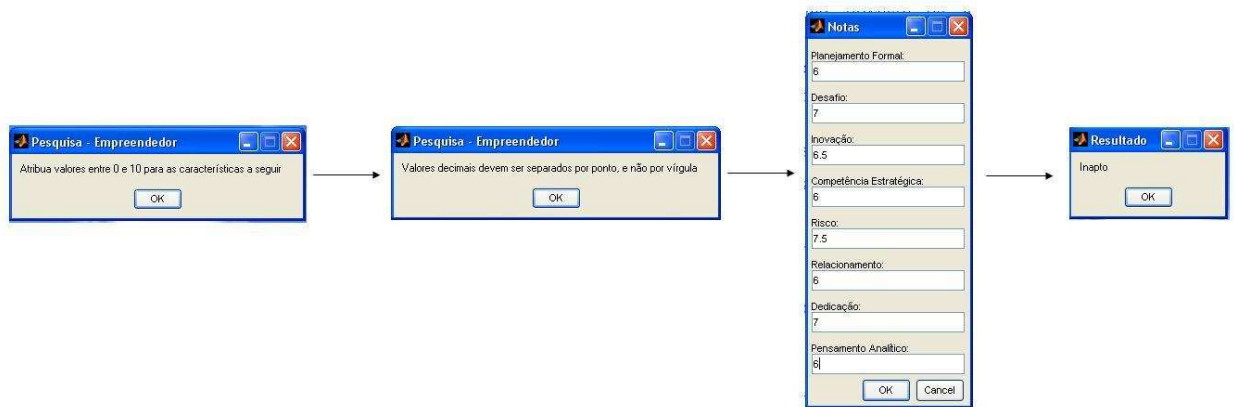


Figura 3.7: Programa feito no Matlab para avaliação empreendedora.

## Capítulo 4

# Sistemas P-Fuzzy

Equações diferenciais determinísticas modelam fenômenos cujas variáveis de estado estão sujeitas a variações temporais, o que a torna uma ferramenta poderosa quando se conhece as relações entre as variáveis e as variações. Porém, em certos fenômenos, tais variáveis e variações não são muito bem conhecidas, o que torna tal modelagem menos atraente. Uma modelagem alternativa é o que chamamos de Sistema P-Fuzzy, ou puramente fuzzy, que trabalha com variáveis e variações imprecisas. O sistema é chamado de Puramente Fuzzy pois as informações obtidas sobre as variáveis de estado são linguísticas e cada uma destas variáveis podem ser conhecidas apenas qualitativamente e modeladas por conjuntos fuzzy, cujas funções de pertinência são obtidas junto a um especialista.

Essa é uma outra possibilidade para aplicações de SBRF: a obtenção de um sistema dinâmico a partir de um SBRF. Podemos então aplicar a idéia de “controlador fuzzy” numa situação dinâmica, por exemplo, em problemas normalmente modelados por equações diferenciais, ou de diferença. As idéias apresentadas neste capítulo foram desenvolvidas em [19].

Um sistema p-fuzzy em  $\mathbb{R}^n$  é um sistema dinâmico discreto da forma

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + \Delta(x_k) = F(x_k), \\ x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

no qual  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  é conhecido,  $x_k \in \mathbb{R}^n$ , e  $\Delta(x_k) \in \mathbb{R}^n$  é obtido por um SBRF (iremos utilizar o SBRF do tipo Mamdani).

Os sistemas p-fuzzy incorporam informações subjetivas tanto nas variáveis quanto nas variações, o que os torna uma ferramenta útil em fenômenos cujas relações entre variáveis e variações são parcialmente desconhecidas. As demonstrações dos teoremas apresentados a seguir poderão ser encontradas em outros trabalhos, como [1], [19], [5].

A figura 4.1 descreve a arquitetura de um sistema p-fuzzy.

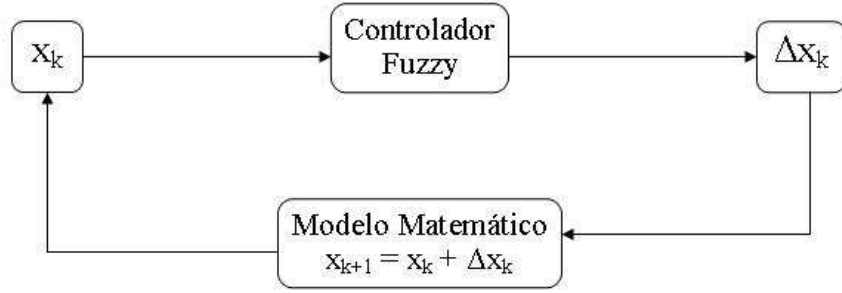


Figura 4.1: Arquitetura de um Sistema P-Fuzzy.

## 4.1 Sistemas P-Fuzzy Unidimensionais

Um sistema p-fuzzy unidimensional tem a forma

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + \Delta(x_k) = F(x_k), \\ x_0 \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (4.1)$$

onde  $x_k \in \mathbb{R}$ , e  $\Delta(x_k)$  é obtido através de um SBRF.

**Definição 4.1.** Dizemos que  $x^*$  é ponto de equilíbrio de 4.1 se

$$F(x^*) = x^* + \Delta(x^*) = x^* \iff \Delta(x^*) = 0.$$

**Definição 4.2.** Seja  $\{A_i\}_{1 \leq i \leq k}$  uma família finita de subconjuntos fuzzy normais associados a uma variável linguística  $x$ . Dizemos que  $\{A_i\}_{1 \leq i \leq k}$  é uma família de subconjuntos fuzzy sucessivos se,

1.  $\text{supp}(A_i) \cap \text{supp}(A_{i+1}) \neq \emptyset$ , para cada  $1 \leq i \leq k - 1$ ;
2.  $\bigcap_{j=i, i+2} \text{supp}(A_j)$  tem no máximo um elemento para cada  $1 \leq i \leq k - 1$ , isto é,  $\text{supp}(A_i) \cap \text{supp}(A_{i+2}) = \emptyset$  se, e somente se,  $\max\{x \in \text{supp}(A_i)\} = \min\{x \in \text{supp}(A_{i+2})\}$ ;
3.  $\bigcup_{i=1, k} \text{supp}(A_i) = U$ , onde  $U$  é o domínio da variável linguística  $x$ ;
4. dados  $x_1 \in \text{supp}(A_i)$  e  $x_2 \in \text{supp}(A_{i+1})$ ; se  $\varphi_{A_i}(x_1) = \varphi_{A_{i+1}}(x_2) = 1$ , então  $x_1 < x_2$ .

Um exemplo de conjunto fuzzy sucessivo é mostrado na figura 4.2.

**Definição 4.3.** Consideremos uma família de subconjuntos fuzzy sucessivos  $\{A_i\}_{1 \leq i \leq k}$ , que descreve o antecedente de um sistema fuzzy associado ao sistema p-fuzzy (4.1). Dizemos que  $A^*$  é um **conjunto viável de equilíbrio** do sistema p-fuzzy (4.1) se  $A^*$  contém pontos estacionários de (4.1).

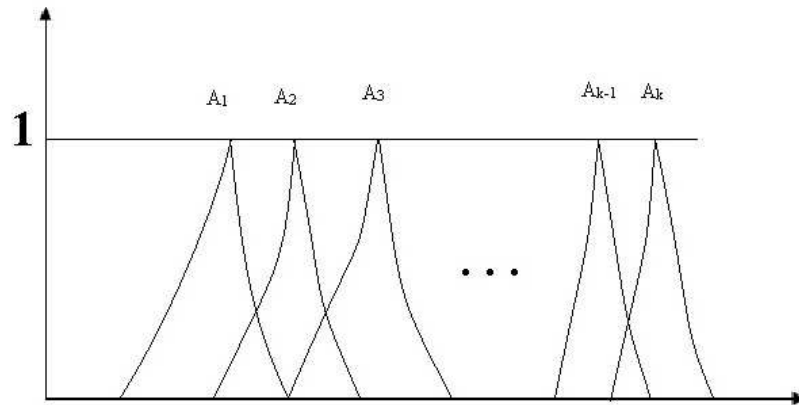


Figura 4.2: Família de subconjuntos fuzzy sucessivos.

Se para algum  $1 \leq i \leq k$  existir  $x_1, x_2 \in [A_i \cup A_{i+1}]^0$ , tal que  $\Delta x_1$  e  $\Delta x_2$  possuem sinais contrários, então  $A^*$  é dado por  $A^* = [A_i \cap A_{i+1}]^0$ .

Um exemplo de conjunto viável de equilíbrio é mostrado na figura 4.3.

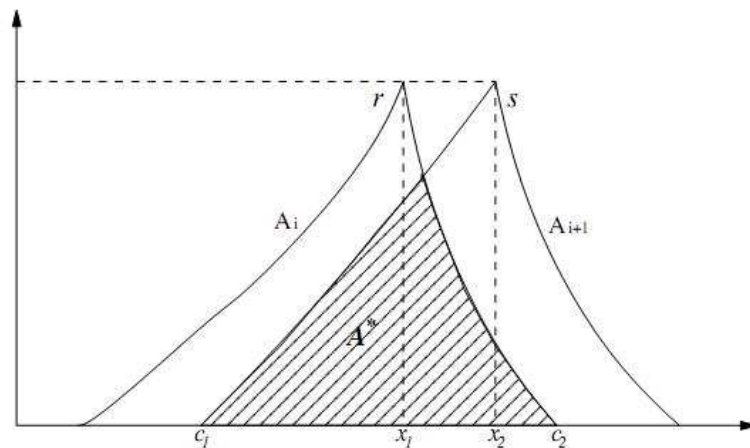


Figura 4.3: Conjunto viável de equilíbrio.

Um sistema p-fuzzy depende do sistema fuzzy associado a ele, isto é, depende da base de regras, do método de inferência e do método de defuzzificação utilizado. Na definição (4.3), uma condição suficiente para que  $\Delta x_1$  e  $\Delta x_2$  possuam sinais contrários é que o sistema p-fuzzy esteja associado a um sistema fuzzy cuja base de regras seja do tipo:

$$R_i: \text{ Se } x \text{ é } A_i \text{ então } \Delta(x) \text{ é } B_i$$

$$R_{i+1}: \text{ Se } x \text{ é } A_{i+1} \text{ então } \Delta(x) \text{ é } B_{i+1}$$

em que  $\text{supp}(B_i) \subset \mathbb{R}_+$  e  $\text{supp}(B_{i+1}) \subset \mathbb{R}_-$  ou  $\text{supp}(B_i) \subset \mathbb{R}_-$  e  $\text{supp}(B_{i+1}) \subset \mathbb{R}_+$

As demonstrações dos teoremas que enunciaremos a seguir podem ser encontradas em [19].

**Teorema 4.1.** *Se um sistema p-fuzzy  $S$  admite um conjunto viável de equilíbrio  $A^*$ , com  $\text{supp}(A^*) \neq \emptyset$ , então existe pelo menos um estado de equilíbrio na região viável de equilíbrio  $\text{supp}(A^*)$ , isto é,  $\exists x^* \in \text{supp}(A^*)$  tal que  $\Delta(x^*) = 0$ .*

As restrições nos conjuntos sucessivos que determinam os termos linguísticos do conjunto p-fuzzy indicam se o ponto de equilíbrio é único ou não, como mostra o seguinte teorema.

**Teorema 4.2.** *Sejam  $\text{supp}(A^*) = \text{supp}(A_i \cap A_{i+1}) = (c_1; c_2)$  a região viável de equilíbrio,  $\varphi_{A_i}$  e  $\varphi_{A_{i+1}}$  monótonas em  $\text{supp}(A^*)$  e ainda  $x_1, x_2$  tais que  $\varphi_{A_i}(x_1) = \varphi_{A_{i+1}}(x_2) = 1$ . Se  $x_1 \leq c_1$  e  $x_2 \geq c_2$  então existe um único ponto de equilíbrio em  $\text{supp}(A^*)$ .*

A estabilidade do sistema p-fuzzy pode ser analisada através da derivada de  $F(x_k) = x_k + \Delta(x_k)$ . Se  $-1 < F'(x^*) < 1$ , teremos estabilidade do sistema p-fuzzy, e instabilidade caso contrário. Temos que  $x^*$  pode ser:

1. assintoticamente estável com convergência monótona, se  $\Delta'(x^*) \in (-1; 0)$ ;
2. assintoticamente estável com convergência oscilatória, se  $\Delta'(x^*) \in (-2; -1)$ ;
3. neutralmente estável, se  $\Delta'(x^*) = 0$  ou  $\Delta'(x^*) = -2$ ;
4. instável, se  $\Delta'(x^*) \notin [-2; 0]$ .

## 4.2 Sistemas P-Fuzzy Bidimensionais

Um sistema p-fuzzy bidimensional tem a forma

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + \Delta_x(x_k, y_k), \\ y_{k+1} = y_k + \Delta_y(x_k, y_k), \\ (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2, \end{cases} \quad (4.2)$$

onde as variações  $\Delta_x(x_k, y_k)$  e  $\Delta_y(x_k, y_k)$  são as saídas de um SBRF.

**Definição 4.4.** *Dizemos que  $(x^*, y^*)$  é ponto de equilíbrio de 4.2 se*

$$\begin{cases} \Delta_x(x^*, y^*) = 0, \\ \Delta_y(x^*, y^*) = 0. \end{cases}$$

Iremos analisar cada variável separadamente, para encontrarmos as regiões de equilíbrio de cada variável, e assim sendo, encontraremos a região de equilíbrio do sistema 4.2 fazendo o produto cartesiano dessas regiões. Então, podemos considerar que cada uma das variações  $\Delta_x$  e  $\Delta_y$  estão associadas à regras do tipo

se  $x$  está em  $A_i$  e  $y$  está em  $B_i$  então  $\Delta_c$  está em  $C_i$ .

Se em alguma região do domínio  $\Delta_x(x_k, y_k)$  e  $\Delta_y(x_k, y_k)$  são determinadas por regras do tipo:

se  $x$  está em  $A_1$  e  $y$  está em  $B_1$  então  $\Delta_c$  está em  $C_1$ ;

se  $x$  está em  $A_1$  e  $y$  está em  $B_2$  então  $\Delta_c$  está em  $C_2$ ;

se  $x$  está em  $A_2$  e  $y$  está em  $B_1$  então  $\Delta_c$  está em  $C_3$ ;

se  $x$  está em  $A_2$  e  $y$  está em  $B_2$  então  $\Delta_c$  está em  $C_4$ ,

com  $\text{supp}(C_1 \cup C_2) \subset \mathbb{R}^-$ ,  $\text{supp}(C_3 \cup C_4) \subset \mathbb{R}^+$ ,  $A_i$  e  $B_i$  sucessivos, então existirá um estado de equilíbrio para o sistema 4.2. Neste caso,  $A^* = A_1 \cap A_2$  é o conjunto viável de equilíbrio.

**Definição 4.5.** *Consideremos duas famílias de subconjuntos fuzzy sucessivos  $\{A_i\}_{1 \leq i \leq n}$  e  $\{B_i\}_{1 \leq i \leq m}$ , que descrevem os antecedentes de um sistema fuzzy associado ao sistema p-fuzzy 4.2. Dizemos que  $R^* = \text{supp}(A^*) \times \text{supp}(B^*)$  é uma região viável de equilíbrio do sistema 4.2 se  $A^*$  e  $B^*$  são conjuntos viáveis de equilíbrio para as variações  $\Delta_x(x_k, y_k)$  e  $\Delta_y(x_k, y_k)$ , respectivamente.*

Em [19], Silva demonstra que existe pelo menos um ponto de equilíbrio  $(x^*, y^*) \in R^*$ , se  $R^*$  for uma região viável de equilíbrio. As condições de existência de um estado de equilíbrio único para sistemas bidimensionais podem ser encontradas em [5].

Em [14], Peixoto apresenta um modelo do tipo presa-predador utilizando Sistema P-Fuzzy bidimensional para estudar a interação entre pulgões, joaninhas e um parasitóide da citricultura, onde pulgões são considerados agentes transmissores da morte súbita dos citros. A utilização de teoria fuzzy para abordar tal problema é devido ao fato das informações com respeito ao fenômeno serem qualitativa, sendo difícil expressar as variações como funções dos estados. Com informações de especialistas, foi possível a elaboração de uma base de regras que relacionam as variáveis de estado com suas próprias variações, representando a interação entre pulgões, joaninhas e um parasitóide na citricultura [15].



### 4.3 Análise comparativa entre equações diferenciais e sistemas p-fuzzy

Iremos estudar uma variação populacional genérica e comparar a solução obtida através de equações diferenciais com a solução obtida usando o sistema p-fuzzy. Na verdade, iremos simular a equação diferencial utilizando base de regras e sistemas p-fuzzy, e verificar a proximidade das soluções.

Utilizaremos o modelo logístico clássico:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x \left(1 - \frac{x}{K}\right), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

que tem por solução única a curva

$$x(t) = \frac{x_0 K}{x_0 + (K - x_0)e^{-\alpha t}}.$$

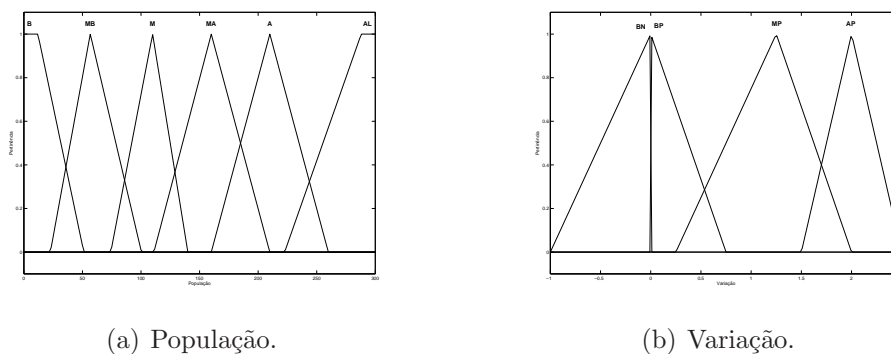
Para obter o sistema p-fuzzy utilizaremos as variáveis linguísticas população e variação. A variável população será a variável de entrada (Figura 4.4 a), definida pelos termos linguísticos: Baixa(B), Média Baixa(MB), Média(M), Média Alta(MA), Alta(A) e Altíssima(AL) e a variável de saída, variação (Figura 4.4 b), será definida pelos termos linguísticos: Baixa Negativa(BN), Baixa Positiva(BP), Média Positiva(MP) e Alta Positiva(AP).

A base de regras é constituída pelas seguintes proposições:

se a população é baixa então a variação é baixa positiva.  
 se a população é média baixa então a variação é média positiva.  
 se a população é média então a variação é alta positiva.  
 se a população é média alta então a variação é média positiva.  
 se a população é alta então a variação é baixa positiva.  
 se a população é altíssima então a variação é baixa negativa.

As soluções, tanto da EDO quanto do sistema p-fuzzy, podem ser vistas na figura 4.5. Para a solução clássica, utilizamos  $K = 234,714951$ ,  $x_0 = 12,7945$  e  $a = 0,02232$ .

Podemos perceber que as soluções são muito próximas, mas isso é devido ao ajuste feito nos parâmetros da solução clássica, ou seja, é possível utilizar o método p-fuzzy para se obter os parâmetros para o modelo clássico, por exemplo, através de um ajuste de curva.



(a) População.

(b) Variação.

Figura 4.4: Variáveis de entrada e saída.

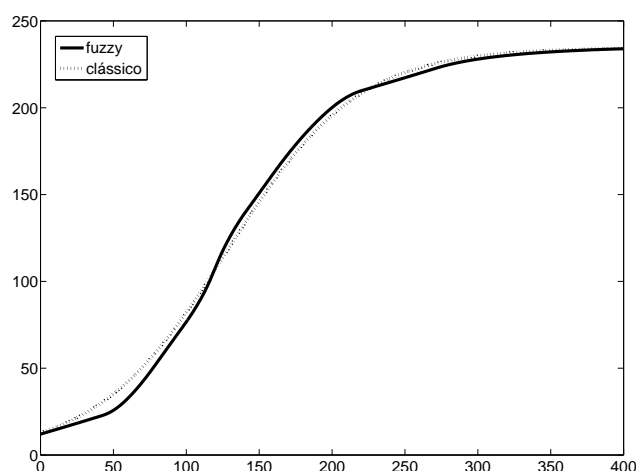


Figura 4.5: Gráficos do modelo clássico e p-fuzzy.

A idéia principal de se trabalhar com sistemas p-fuzzy é quando não se têm possibilidade de avaliar certos parâmetros ou quando as variáveis estão carregadas de subjetividades.

#### 4.4 Dinâmica Populacional Fuzzy com Condição Ambiental

No estudo da dinâmica populacional, muitas vezes não se leva em consideração fatores extrínsecos da espécie durante a formulação do modelo. Temperatura, umidade, poluição, entre outros, são fatores que podem modificar a evolução de uma determinada população.

Neste capítulo, iremos estudar a dinâmica de uma população levando-se em conta um fator externo, que iremos chamar de Condição Ambiental. Esta seção foi baseada no trabalho de Santos [16]. Fizemos uma pequena modificação na função que representa a condição ambiental em cada iteração do estudo, para facilitar a compreensão da dinâmica.

O crescimento de uma espécie específica pode diferenciar de acordo com a época do ano, digamos que esse crescimento é maior durante a época de calor. Isso significa que uma

condição ambiental, sazonal neste caso, modifica a capacidade reprodutiva dos indivíduos, e portanto, altera a taxa de crescimento destes.

Em modelos clássicos, os parâmetros (constantes) das equações diferenciais são escolhidos de tal forma que melhor representem as condições ambientais. No modelo que vamos estudar, ao contrário de constantes, usaremos um SBRF para determinarmos tais variações.

#### 4.4.1 Modelagem

Utilizaremos um SBRF que, além de nos fornecer a variação em função da população, também leve em conta o período.

A base de regras pode ser construída com o auxílio de um especialista, que pode nos ajudar quantificando e qualificando a influência da condição ambiental no sistema.

Iremos utilizar as seguintes hipóteses:

1. a densidade populacional da espécie será representada pela variável *população* ( $x$ ), definida pelos termos linguísticos  $\Phi_x = \{Baixa(B), Média Baixa(MB), Média(M), Média Alta(MA), Alta(A) e Altíssima(AL)\}$ , para representar subjetivamente seus estados.
2. a variável *variação populacional* ( $\Delta x$ ) terá seus estados modelados por  $\Phi_{\Delta x} = \{Alta Negativa (AN), Média Negativa(MN), Baixa Negativa(BN), Baixa Positiva(BP), Média Positiva(MP) e Alta Positiva(AP)\}$ ;
3. a taxa de variação da espécie ( $\Delta x$ ) depende da densidade populacional da própria espécie, e a variação desta taxa também será influenciada pela sazonalidade. Isto é, a taxa de crescimento da espécie se modificará de acordo com o tempo que se encontra;
4. o crescimento será maior nas estações mais quentes e chuvosas do ano. Nas estações mais frias, a taxa de natalidade da espécie diminui, chegando ao ponto de ser negativa, ou seja, há mais mortalidade do que natalidade;
5. as condições *quente, frio, seco e chuvoso* são determinantes para o crescimento de muitas espécies. Elas estarão neste modelo assumindo a variável *Condição Ambiental* ( $\alpha$ ), cujos termos linguísticos que a modelam são  $\Phi_\alpha = \{Favorável(F), Pouco Favorável(PF) e Desfavorável(D)\}$ . Assim, a condição ambiental favorecerá, ou desfavorecerá, com algum grau a taxa de crescimento da espécie em questão;

6. a variável  $\alpha$  dependerá do estágio  $k$  do sistema iterativo, já que  $\alpha$  influenciará na variação  $\Delta x$  que depende da época do ano em que estamos avaliando.

A partir de um sistema p-fuzzy unidimensional e das hipóteses acima, vamos inserir a variável *condição ambiental* ( $\alpha$ ) no sistema (veja figura 4.6).

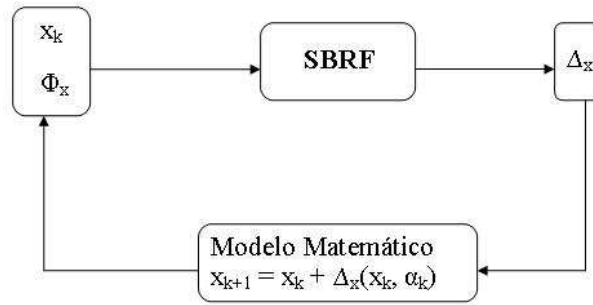


Figura 4.6: Arquitetura de um Sistema P-Fuzzy com Condição Ambiental.

Nosso sistema terá agora duas entradas, *população* ( $x$ ) e *condição ambiental* ( $\alpha$ ), e uma saída, *variação populacional* ( $\Delta_x(x, \alpha)$ ). As funções de pertinência destas variáveis estão representadas na figura 4.7.

Neste modelo, estamos considerando um período de 365 iterações, onde, nas primeiras 91 iterações temos  $\alpha$  favorável, entre 91 e 182 iterações,  $\alpha$  é pouco favorável, após esse período e até 273,  $\alpha$  é desfavorável e entre 273 e 365 temos  $\alpha$  novamente pouco favorável.

É claro que podemos ter mais de 365 iterações, mas nosso sistema é cíclico, ou seja, podemos obter nosso  $\alpha(k)$  definindo uma função  $\eta : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1, \dots, 365\}$ ,

$$\eta(k) \equiv k \pmod{365},$$

onde  $k \in \mathbb{N}$ .

#### 4.4.2 Construindo a Base de Regras

Nossa base de regras será constituída de 18 regras da forma

$$\text{Se } x \text{ é } A_i \text{ e } \alpha \text{ é } B_i \text{ então } \Delta_x \text{ é } C_i$$

onde  $1 \leq i \leq 18$ ,  $A_i \in \Phi_x$ ,  $B_i \in \Phi_\alpha$  e  $C_i \in \Phi_{\Delta_x}$ . As 18 regras podem ser vistas na tabela abaixo. Podemos ver que se população é média e a condição ambiental é pouco favorável, então a variação é alta positiva.

Analisando a tabela 4.1, pode-se tomar as seguintes conclusões:

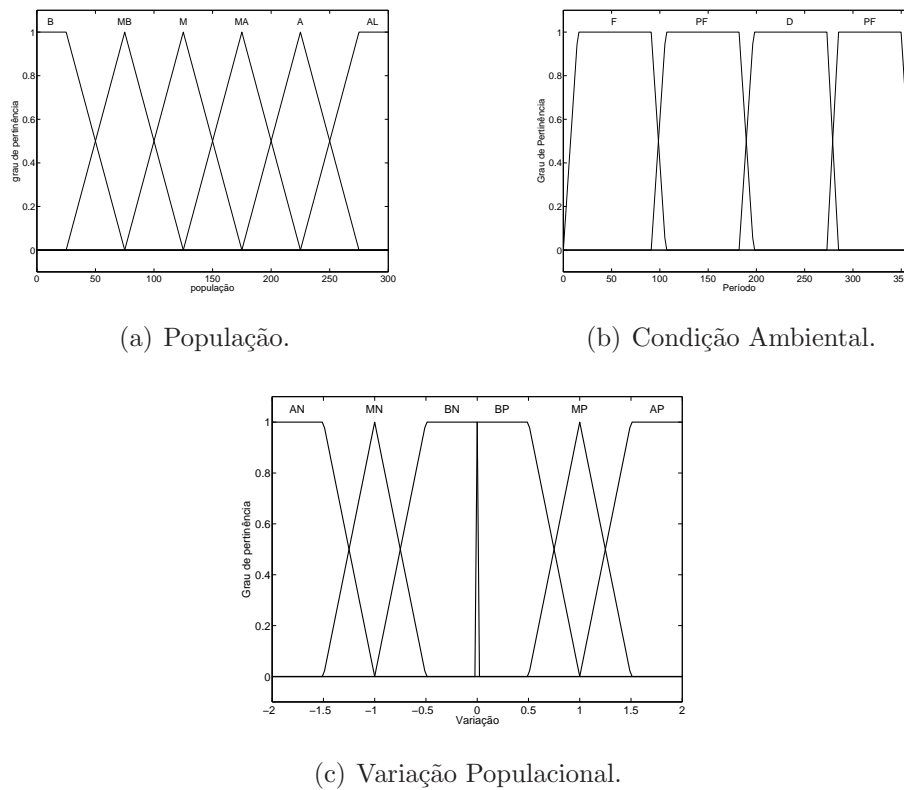


Figura 4.7: Variáveis de entrada e saída.

$x \times \alpha$	Favorável(F)	Pouco Favorável(PF)	Desfavorável(D)
Baixa(B)	MP	BP	BN
Média Baixa(MB)	AP	MP	BN
Média(M)	AP	AP	MN
Média Alta(MA)	AP	MP	MN
Alta(A)	MP	BP	AN
Altíssima(AL)	BN	MN	AN

Tabela 4.1: Base de regras.

1. Quanto mais favorável o ambiente, maior a taxa de crescimento populacional;
2. Se a população for altíssima, teremos um crescimento negativo, devido ao fato da população ter ultrapassado a capacidade suporte;
3. O ambiente desfavorável faz com que a taxa de variação seja negativo, isto é, mais mortes do que nascimentos.

O sistema p-fuzzy com condição ambiental pode ser representado como

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + \Delta_x(x_k, \alpha_k), \\ (x_0, \alpha_0) \in \mathbb{R} \times \{0, 1, \dots, 365\}, \end{cases}$$

onde  $\Delta_x(x_k, \alpha_k)$  é obtido através de um SBRF. Observe que nosso SBRF modela uma função  $\rho : \mathbb{R} \times \{0, 1, \dots, 365\} \rightarrow \mathbb{R}$ . Do ponto de vista variacional, temos uma função do tipo não autônoma, pois ela varia de acordo com o tempo explicitamente.

#### 4.4.3 Experimentos Numéricos

Para lidarmos com modelagem fuzzy e implementar nosso sistema iterativo, iremos utilizar o *Fuzzy Logic Toolbox* do software *Matlab*<sup>®</sup>, com os passos dados a seguir, e levando em consideração que:

1.  $x_k$  e  $\alpha(\eta_k)$  é a população e a condição ambiental no instante  $k$ , respectivamente;
2.  $K$  é o número final de iterações do sistema p-fuzzy;
3.  $F$  é a função que representa o SBRF com as regras descritas na tabela 4.1.

---

Algoritmo para solução do sistema p-fuzzy unidimensional com condição ambiental

---

**Entrada:**  $x_0, \alpha(\eta_0), K$

**Para**  $k$  de 1 até  $K$  **faça**

$F(x_k, \alpha(\eta_k)) \rightarrow \Delta_x$

$x_k + \Delta_x \rightarrow x_{k+1}$

**Para**

**Saída:**  $x_K$

---

Tabela 4.2: Algoritmo.

Os resultados dos experimentos são mostrados abaixo. Conforme era de se esperar, obtivemos um ambiente cíclico, que depende não só da dinâmica populacional, mas também da condição ambiental.

O nosso primeiro experimento (Figura 4.8) utiliza  $x_0 = 40$  e  $K = 400$ . Os gráficos acima mostram a dinâmica populacional para tais valores. As mudanças que podem ser percebidas em cada um dos gráficos refere-se à condição ambiental, que foi modificada.

No segundo experimento, variamos a população inicial para  $x_0 = 150$  (Figura 4.9) e depois para  $x_0 = 250$  (Figura 4.10), mantendo  $K = 400$  e variando a condição ambiental.

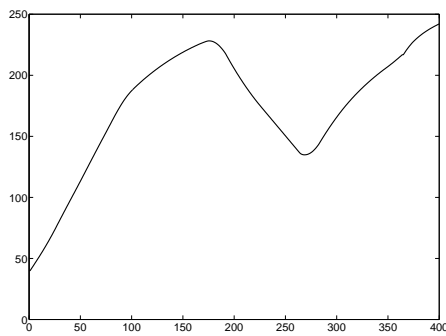
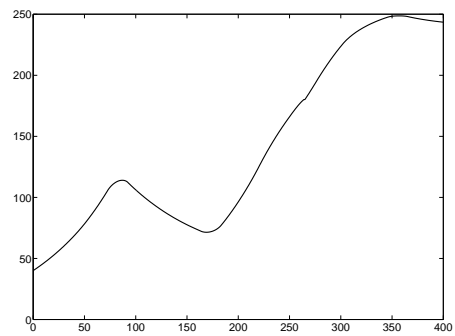
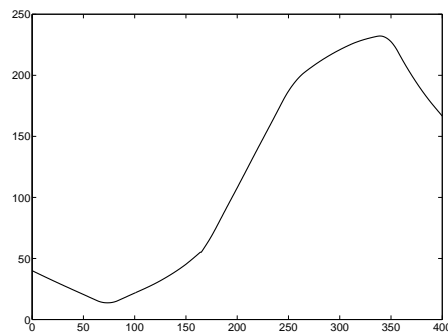
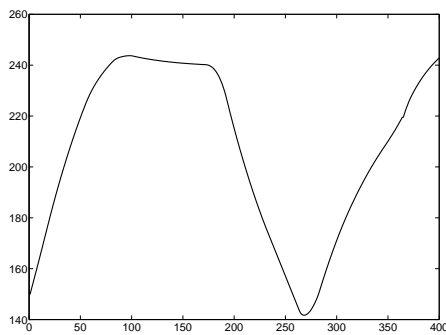
(a)  $k_0 = 0$  ( $\alpha$  favorável).(b)  $k_0 = 100$  ( $\alpha$  pouco favorável).(c)  $k_0 = 200$  ( $\alpha$  desfavorável).

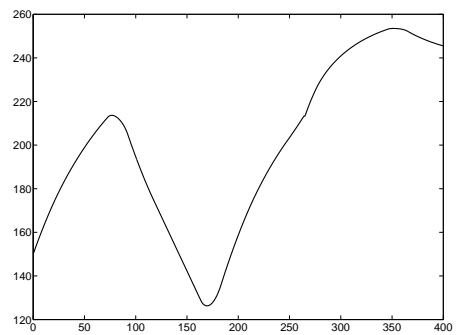
Figura 4.8: Iteração  $\times$  População. Soluções com  $x_0 = 40$ ,  $K = 400$  e condição ambiental variando.

O que pudemos perceber é que tanto no primeiro experimento, quanto no segundo, a sazonalidade fica bem evidenciada: crescimento positivo nas épocas favoráveis, e negativo nas desfavoráveis.

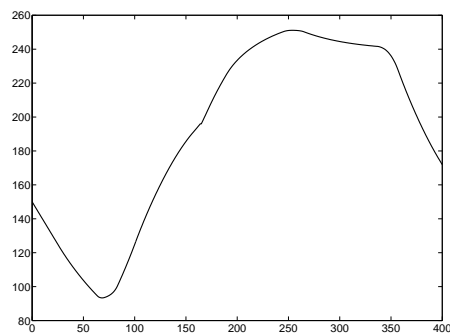
Para evidenciar o ambiente cíclico, no terceiro experimento (Figura 4.11), variamos o número de iterações. Tomamos  $K = 800$  e  $x_0 = 50$ .



(a)  $k_0 = 0$  ( $\alpha$  favorável).



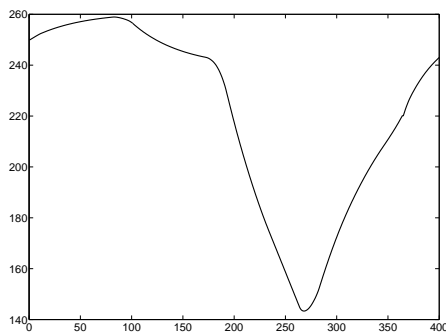
(b)  $k_0 = 100$  ( $\alpha$  pouco favorável).



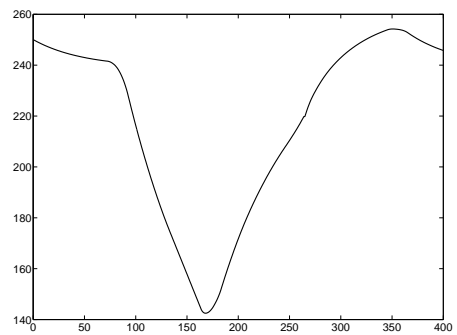
(c)  $k_0 = 200$  ( $\alpha$  desfavorável).

Figura 4.9: Iteração  $\times$  População. Soluções com  $x_0 = 150$ ,  $K = 400$  e condição ambiental variando.

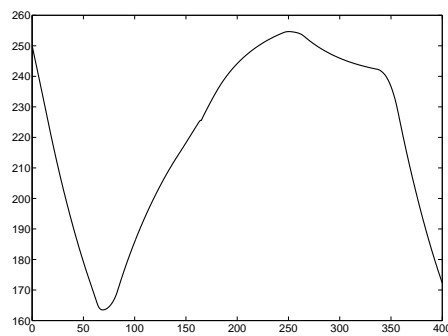




(a)  $k_0 = 0$  ( $\alpha$  favorável).

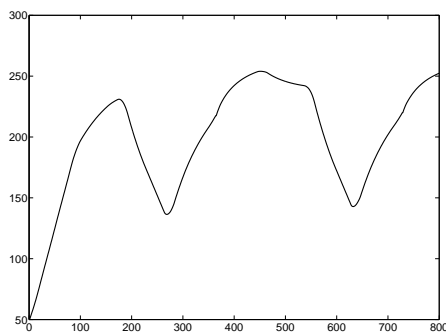
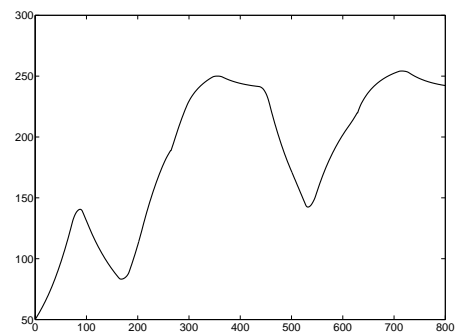
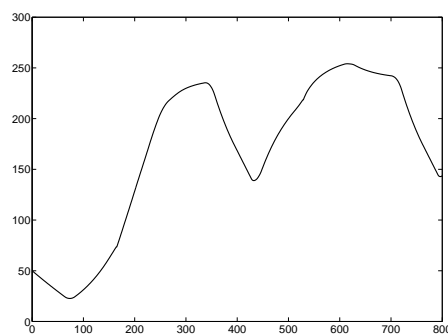


(b)  $k_0 = 100$  ( $\alpha$  pouco favorável).



(c)  $k_0 = 200$  ( $\alpha$  desfavorável).

Figura 4.10: Iteração  $\times$  População. Soluções com  $x_0 = 250$ ,  $K = 400$  e condição ambiental variando.

(a)  $k_0 = 0$  ( $\alpha$  favorável).(b)  $k_0 = 100$  ( $\alpha$  pouco favorável).(c)  $k_0 = 200$  ( $\alpha$  desfavorável).Figura 4.11: Iteração  $\times$  População. Soluções com  $x_0 = 50$ ,  $K = 800$  e condição ambiental variando.

## Conclusão e trabalhos futuros

Nosso principal objetivo neste trabalho foi mostrar diversas aplicações de Sistemas Baseados em Regras Fuzzy, em diferentes áreas da ciência. Vimos aplicações relacionados à biologia, à indústria da cerâmica, ao empreendedorismo. Enfim, pudemos ver que as ferramentas aqui estudadas são de grande potencial, e por isso vem sendo utilizadas em diversos tipos de problemas.

Neste trabalho, apresentamos o que é um Conjunto Fuzzy e alguns principais resultados referentes a esse assunto. Também mostramos algumas aplicações de Lógica Fuzzy, que é o caso dos Sistemas Baseados em Regras Fuzzy. Pudemos perceber que os tais SBRF modelam de maneira satisfatória problemas que, de certa maneira, seriam mais complicados de se trabalhar classicamente. Vimos, através de gráficos, que a dinâmica de um modelo determinístico de uma equação diferencial e o modelo p-fuzzy pouco se diferem. Isso mostra a vantagem de se trabalhar com sistemas p-fuzzy quando se tem algum tipo de variável subjetiva no modelo.

Outra aplicação que vimos aqui neste trabalho foi o que chamamos de “análise de características empreendedoras”. Montamos um SBRF que classificava pessoas quanto à aptidão para abrir uma empresa. Algumas pessoas que procuraram o Sebrae/PA no período de março a abril de 2009 responderam a pesquisa feita pelo programa que fizemos a fim de avaliarmos a validade de tal. Porém, as pessoas que procuram o Sebrae ainda não possuem uma empresa aberta, ou então buscam ajudas para mantê-las “em pé”. Isso dificulta nossa avaliação, pois o resultado será visto futuramente, com o sucesso ou não de suas empresas.

No geral, vimos que a Teoria de Conjuntos Fuzzy, principalmente Sistemas Baseados em Regras Fuzzy, tem uma vasta aplicabilidade em várias áreas da ciência, e pode ser usada, muitas vezes, para facilitar a modelagem de problemas. Além disso, acreditamos que esta teoria ainda tem muito caminho pela frente, devido ao fato de ser uma teoria relativamente nova em se tratando de matemática.

Posteriormente, pretendemos aperfeiçoar a avaliação empreendedora, utilizando oito características empreendedoras e três valores linguísticos. A dificuldade de se fazer tal mudança é que o número de regras subirá para 6561.

## Referências Bibliográficas

- [1] Barros, L. C. e Bassanezi, R. C. *Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática*, Coleção IMECC - Textos Didáticos, vol. 5, IMECC-UNICAMP, Campinas/SP, 2006.
- [2] Carneiro, P. D. P. *Metodologia Fuzzy Aplicada para Predição do Comportamento Empreendedor*, Dissertação de Mestrado, IBMEC, Rio de Janeiro/RJ, 2008.
- [3] Castanho, M. J. P. *Construção e avaliação de um modelo matemático para prever a evolução do câncer de próstata e descrever seu crescimento utilizando a teoria dos conjuntos fuzzy*, Tese de Doutorado, IMECC-UNICAMP, Campinas/SP, 2005.
- [4] Castanho, M. J. P., Barros, L. C. *Prognóstico de Câncer de Próstata: Probabilidade e Possibilidade*, TEMA Tendências em Matemática Aplicada e Computacional, Volume 8, p. 371-379, 2007.
- [5] Cecconello, M. S. *Modelagem Alternativa para Dinâmica Populacional: Sistemas Dinâmicos Fuzzy*, Dissertação de Mestrado, IMECC-UNICAMP, Campinas/SP, 2006.
- [6] Chen, G. e Pham, T. T. *Introduction to Fuzzy Sets, Fuzzy Logic, and Fuzzy Control Systems*, CRC Press, 2000.
- [7] Halmos, P. R. *Teoria Ingênua dos Conjuntos*, Rio de Janeiro, Ciência, Moderna, 2001.
- [8] Lee, K. H. *First Course on Fuzzy Theory and Applications*, Springer, 2004.
- [9] Klir, G. J. e Yuan, B. *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic - Theory and Applications*, Prentice Hall, 1995.
- [10] Neto, A. A. C. e Castanho, M. J. P. *Uso de um Sistema Baseado em Regras Fuzzy para avaliar a qualidade da cerâmica vermelha*, Revista Eletrônica Lato Sensu, Volume 3, p. 2, 2008.
- [11] Núcleo de Estudos de Otimização - Sistemas Fuzzy (<http://www.lps.usp.br/neo/>). Último acesso em Outubro/2009.

- [12] Pedrycz, W. e Gomide, F. *An Introduction to Fuzzy Sets: Analysis and Design*, Massachusetts Institute of Technology, 1998.
- [13] Pedrycz, W. e Gomide, F. *Fuzzy Systems Engineering: toward human-centric computing*, IEEE, Wiley-Interscience.
- [14] Peixoto, M. S. *Sistemas Dinâmicos e Controladores Fuzzy: um Estudo da Dispersão da Morte Súbita dos Citros em São Paulo*, Tese de Doutorado, IMECC-UNICAMP, Campinas/SP, 2005.
- [15] Peixoto, M. S., Barros, L. C. e Bassanezi, R. C. *Uma Abordagem Fuzzy para um Modelo Presa-predador Acoplado ao Parasitismo*, TEMA Tendências em Matemática Aplicada e Computacional, Volume 8, p. 119-128 2007.
- [16] Santos, L. R. *Estratégia para Controle de Pragas: Sistemas P-Fuzzy com Controle Híbrido*, Dissertação de Mestrado, IMECC-UNICAMP, Campinas/SP, 2007.
- [17] Savergnini, K. D. *Modelagem Fuzzy para Predizer os Riscos de Recidiva e Progressão de Tumores Superficiais de Bexiga*, Dissertação de Mestrado, IMECC-UNICAMP, Campinas/SP, 2009.
- [18] Serviço de Apoio às Micro e Pequenas Empresas ([www.sebrae.com.br/](http://www.sebrae.com.br/)). Último acesso em Agosto/2009.
- [19] Silva, J. D. M. *Análise de Estabilidade de Sistemas Dinâmicos P-Fuzzy com Aplicações em Biomatemática*, Tese de Doutorado, IMECC-UNICAMP, Campinas/SP, 2005.
- [20] Veit, M. R. e Filho, C. G. *O Perfil do Potencial Empreendedor e o Impacto no Desempenho do Negócio*, Dissertação de Mestrado, FUMEC, Belo Horizonte/MG, 2006.
- [21] Villela, M. F. S., Santos, P. B. *Usando Teoria Fuzzy na Modelagem de Fenômenos Biológicos*, Revista do Simpósio de Aplicações em Lógica Fuzzy (p. 34-37),2008.
- [22] Zadeh, L. A. *Fuzzy Sets*, Information and Control, Volume 8, p. 338-353, 1965.

## **SÚMULA CURRICULAR**

### **DADOS PESSOAIS**

Nome: Danilo Peixoto Bellucci

Local e data de nascimento: Rio Claro, 23 de julho de 1986.

### **EDUCAÇÃO**

Colégio Puríssimo Coração de Maria, Rio Claro, 2003.

Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2007.

Licenciatura em Matemática.

### **FORMAÇÃO COMPLEMENTAR**

Iniciação Científica, UNESP Rio Claro, 2006.

Curso de Inglês, WISDOM, 2007.

Álgebra Linear, USP São Carlos, 2007.

### **ATIVIDADES ACADÊMICAS**

Bolsista de Mestrado, CAPES, 2008-2009.

### **PUBLICAÇÕES**

Danilo Peixoto Bellucci; Adílson José Vieira Brandão: Análise de Empreendedorismo Utilizando Sistemas Baseados em Regras Fuzzy, CNMAC, 2009.